Die Berechnung der Eigenwerte und Eigenlösungen linearer Gleichungssysteme.

Lebenslauf des Verfassers.

Geboren: 8. 9. 1904 in Frankfurt am Main.

Eltern: Rechtsanwalt Eduard Hessenberg und Frau Emma geb. Kugler.

Schulzeit: 1911 bis 1923 (Gymnasium).

Reifeprüfung: Ostern 1923.

Praktische Ausbildung: April 1923 bis April 1925 als Praktikant bei Hartmann & Braun A. G. in Frankfurt a.M.

Hochschulstudium: 1925 bis 1930 an der Technischen Hochschule in Darmstadt (Elektrotechnik).

Diplom-Hauptprüfung: Herbst 1930.

Berufstätigkeit:

Juni 1931 bis Januar 1932 als Hilfsassistent für praktische Mathematik bei Herrn Prof. Dr. Walther an der T.H. Darmstadt

Februar 1932 bis September 1936 als Ingenieur im Elektrizitätswerk Rheinhessen A.G., Worms.

seit Oktober 1936 als Ingenieur in der Technischen Berechnungsstelle der A.E.G., Berlin.

Karl Hessenberg.

Die Berechnung der Eigenwerte und Eigenlösungen linearer Gleichungssysteme.

Von der Abteilung für Mathematik und Naturwissenschaften
der Technischen Hochschule Darmstadt
zur
Erlangung des Grades eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigte
Dissertation
vorgelegt von
Karl Hessenberg
aus Frankfurt am Main.

Berichterstatter: Professor Dr. Walther
Mitberichterstatter: Professor Dr. Schmieden
Tag der Einreichung: 16. 12. 1939.
Tag der mündlichen Prüfung: 26. 7. 1940.

D 87.

Vorwort.

Die Anregung zu der vorliegenden Abhandlung gab mir im Jahre 1931 Herr Professor Walther durch den Hinweis auf zwei Literaturstellen, in denen u.a. die Ermittlung der Eigenwerte des homogenen linearen Gleichungssystems

$$\sum_{k=1,2,\ldots,n} a_{ik} x_k - \lambda x_i = 0 \quad (i=1,2,\ldots,n) \qquad (I)$$

behandelt ist [1] [2].

v. Mises und Pollaczek-Geiringer empfehlen ein Näherungsverfahren, das sich zwar für die Berechnung des grössten Eigenwertes oft recht gut eignet, das jedoch für die Ermittlung eines zweiten oder gar weiterer Eigenwerte in der angegebenen Form praktisch kaum in Betracht kommt. (Vgl. Abschn. VI der vorliegenden Arbeit). Auch das von Mehmke angegebene Verfahren erfordert immerhin einen beträchtlichen Arbeitsaufwand, ganz abgesehen davon, dass das Verfahren in der beschriebenen Weise nur für die Lösung solcher Aufgaben geeignet ist, in denen sämtliche Elemente a_{ik} kleine ganze Zahlen sind.

Beide Veröffentlichungen weisen einen gemeinsamen Mangel auf: Es fehlen jegliche Angaben darüber, unter welchen Voraussetzungen die vorgeschlagenen Verfahren zur Lösung der gestellten Aufgabe mit Vorteil benutzt werden können. Gerade diese Frage ist aber für praktische Anwendungen besonders wichtig. Die Auflösung vielreihiger Gleichungssysteme erfordert selbst bei ganzstiger Wahl des Berechnungsverfahrens oft eine umfangreiche Rechenarbeit, die u. U. Tage oder gar Wochen in Anspruch nimmt. Selbstverständlich wird man dann bestrebt sein, jeden unnötigen Arbeitsaufwand zu vermeiden.

Eine Beurteilung der einzelnen Verfahren ist aber nur durch Vergleich mit andern Verfahren möglich, und hierfür ist es notwendig, die verschiedenen zur Lösung der obigen Aufgabe anwendbaren Verfahren zu erörtern und deren besonderen Vor- und Nachteile, insbesondere den jeweils erforderlichen Arbeitsaufwand zu untersuchen.

Das bisherige Fehlen derartiger Untersuchungen muss als ein Mangel empfunden werden. Die vorliegende Abhandlung hat vornehmlich den Zweck, diesen Mangel zu beheben. Dem praktischen Mathematiker, dem Physiker oder Ingenieur, der Aufgaben der hier behandelten Art zu lösen hat, sollen die Mittel in die Hand gegeben werden, mit denen er für die numerische Lösung einer bestimmten Aufgabe ein möglichst zweckmässiges Verfahren wählen kann.

Dieser Zielsetzung entsprechend war es mein Bestreben, die einzelnen Verfahren möglichst elementar darzustellen und dabei nicht mehr als unbedingt notwendig vorauszusetzen. In diesem Sinn habe ich auch, soweit angängig, bewusst darauf verzichtet, mich auf die vorhandene Literatur zu stützen, zumal hierin oft Theorien entwickelt und benutzt werden, die für die Erörterung der in vorliegender Arbeit behandelten Verfahren entbehrlich sind.

Der vorläufige Verzicht auf eine Berücksichtigung der Literatur brachte es allerdings mit sich, dass einige Gedanken, die ich zuerst für neu hielt, sich nach Abschluss der Arbeit als bekannt erwiesen; so besonders die in Abschnitt VII A abgeleitete Aufteilung einer Matrix in "Elementarmatrizen", die als "Frobenius'sche Kovarianten" seit langem bekannt sind [3]. Auch der Grundgedanke des in Abschnitt V behandelten Verfahrens ist kurz vor der endgültigen Einreichung meiner Arbeit an anderer Stelle veröffentlicht worden [4].

Andrerseits blieb vielleicht manches bereits entwickelte Verfahren unberücksicht; das gilt besonders für ein oft recht brauchbares Verfahren, das von Jacobi [5] angegeben wurde. Sei ferner bemerkt, dass auch das in Abschnitt V beschriebene Verfahren noch gewisser Verbesserungen fähig ist, worüber in einer besonderen Arbeit berichtet werden soll. [6]

Immerhin enthält die vorliegende Arbeit eine Anzahl neuer Vorschläge zur Lösung der genannten Eigenwertaufgaben. Ferner konnten auch die bekannten Verfahren z.T. verbessert und unter neuen Gesichtspunkten betrachtet werden. In Anbetracht dessen habe ich die Anregung, die Arbeit als Dissertation einzureichen, gern aufgenommen und würde mich freuen, wenn sie zugleich auch ihren ursprünglichen Zweck, der Praxis zu dienen, voll erfüllt.

Der Verfasser.

Literatur.

1) v.Mises u. Pollaczek-Geiringer, Praktische Verfahren der Gleichungsauflösung. Z.f.ang.Math.u.Mech.9(1929), S.152.

2) Mehmke, Praktische Lösung der Grundaufgaben .... Math. Ann.103, S.700.

3) Frobenius, Ueber vertauschbare Matrices. Sitzungsber.d. Akad.Berlin 1896, S.601.
Pascal, Repertorium der höheren Mathematik, Bd.I,1, S.86.

4) Frazer, Duncan, Collar, Elementar Matrices. Cambridge1938, S.141.

5) Jacobi, Ueber ein leichtes Verfahren, die in der Theorie der Säkularstörungen vorkommenden Gleichungen numerisch aufzulösen. Crelle's Journal 30 (1846), S.51...94.

6) Hessenberg,

I N H A L T S - Ü B E R S I C H T

	Seite
Einleitung	1 - 3
I. Systematisches Ausmultiplizieren der Säkular-Determinante	4 -14
a) Ausmultiplizieren der einzelnen Glieder	4
b) Entwickeln nach Unterdeterminanten	5
c) Umwandlung der Säkulardeterminante in eine Determinante niederer Ordnung	6
d) Verbessertes Eliminationsverfahren	9
II. Systematische Berechnung der Hauptunterdeterminanten	15-23
a) Rechnung mit gebrochenen Koeffizienten	16
b) Rechnung mit ganzzahligen Koeffizienten	21
III. Berechnung der Säkulargleichung und ihrer Wurzeln aus den Verlauf der Funktion $D(\lambda)$	24-30
1) Berechnung der Säkulargleichung aus einzelnen Determinanten	24
2) Verbesserung eines einzelnen Eigenwertes	28
IV. Näherungsverfahren zur genaueren Bestimmung eines Eigenwertes und der zugehörigen Eigenlösung	31-47
1) Der erste Näherungsschritt	31
2) Weitere Verbesserung unter Benutzung der verbesserten Eigenlösung	34
3) Benutzung des verbesserten Eigenwertes	36
Konvergenzbetrachtungen	38
4) Abgekürzte Verfahren	40
Interpolationsformeln zweiter Ordnung	42
5) Benutzung der verbesserten Eigenlösung und des verbesserten Eigenwertes	43
6) Der erforderliche Arbeitsaufwand	45
V. Berechnung der Eigenwerte und Eigenlösungen mit Hilfe der HAMILTON - CAYLEYschen Gleichung	48-71
1) Allgemeine Grundlagen	48
Vektoren (48) - Matrizen (49) - Einheitsmatrix (50) - Potenzen und Polynome einer	

Matrix (50) - Gültigkeit der Multiplikationsgesetze (51) - Reziproke Matrix (51) - Lineare Abhängigkeit von Vektoren (52) - Der Rang einer Matrix (52) - Einige grundlegende Sätze (53)

2) Ableitung des Verfahrens 55

a) Berechnung der Eigenwerte 55
b) Berechnung der Eigenlösungen 57

3) Bestimmung der erforderlichen Rechenarbeit 60

4) Ein Sonderfall 64

a) Berechnung der Eigenwerte 69
b) Berechnung der Eigenlösungen 70

VI. Angenäherte Berechnung einzelner Eigenlösungen und Eigenwerte durch wiederholtes Multiplizieren eines Vektors mit der Matrix 72-82

1) Die Berechnung des grössten Eigenwertes 72
Grundlagen des Verfahrens (72) - Praktische Durchführung der Rechnung (73) - Der erforderliche Arbeitsaufwand (75)

2) Berechnung des zweitgrössten Eigenwertes 76

3) Berechnung des drittgrössten Eigenwertes 81

VII. Berechnung der Elementarmatrizen einer Matrix mit n voneinander verschiedenen Eigenwerten 83-122

A. Theoretische Grundlagen 83-97

1) Erweiterung des Begriffs der Matrix 83
Rechteckige Matrizen; der Vektor als Sonderfall der Matrix (83) - Produktbildungen aus Vektoren (84) - Produktbildungen aus Vektoren und Matrizen (86) - Darstellung einer Matrix durch ihre Spalten oder Zeilen (86) - Verschiedene Darstellungsarten für das Produkt aus zwei Matrizen (87)

2) Eigenspalten und Eigenzeilen einer Matrix 88
Transponierte Matrix (88) - Anwendung auf Vektoren (88) - Eigenspalten der Matrix (88) - Eigenzeilen (89)

Seite

3) Die Darstellung einer Matrix durch ihre Elementarmatrizen 90

Produktbildungen aus Eigenzeilen und Eigenspalten (90) - Elementarmatrizen (91) - Die grundlegenden Sätze über Elementarmatrizen (92) - Die Matrix $\mathfrak{A}$ als Vielfachsumme ihrer Elementarmatrizen (93) - Potenzen und rationale Funktionen der Matrix (95) - Die Elementarmatrizen als Polynome der Matrix $\mathfrak{A}$ (97)

B. Praktische Anwendungen 98-117

1) Bestimmung der ersten Elementarmatrix 98
2) Grenzen der Brauchbarkeit des Verfahrens 99
3) Bestimmung einer beliebigen Elementarmatrix 101
4) Abtrennung bekannter Elementarmatrizen aus der Matrix $\mathfrak{A}$ 102
5) Berechnung des zweitgrössten Eigenwertes λ_2 und der Elementarmatrix $\mathfrak{A}_{02}$ 103
6) Systematische Berechnung der Eigenwerte und Eigenlösungen 105
7) Lösung der Aufgabe bei geringer Verschiedenheit der Eigenwerte 108
8) Beseitigung der Restanteile der bereits bekannten Elementarmatrizen aus einer Matrix $f(\mathfrak{A})$ 110
9) Berechnung des kleinsten Eigenwertes mit Hilfe der reziproken Matrix 113
10) Bestimmung desjenigen Eigenwertes, der einer gegebenen Zahl am nächsten liegt 114
11) Genauere Berechnung eines annähernd bekannten Eigenwertes 117

C. Konvergenzbetrachtungen für die in Abschnitt IV behandelten Näherungsverfahren 118-122

a) Der erste Näherungsschritt 118
b) Benutzung der verbesserten Eigenlösung 119
c) Benutzung des verbesserten Eigenwertes 120

Anhang zu Abschnitt VII:

Die Berechnung der reziproken Matrix 123-127

Determinantenverfahren (123) - Eliminationsverfahren (124) - Näherungsverfahren (125)

Seite

VIII. Näherungsverfahren zur gleichzeitigen Verbesserung sämtlicher Eigenlösungen und Eigenwerte 128-134

Ableitung des Verfahrens (128) - Vereinfachung für symmetrische Matrizen (132) - Der erforderliche Arbeitsaufwand (133)

IX. Mehrfache Eigenwerte 135-155

A. Beschränkte Genauigkeit bei der Berechnung mehrfacher Eigenwerte 135-136

B. Die Eigenlösungen einer Matrix mit mehrfachen Eigenwerten 136-154

1) Zerlegung einer Matrix mit mehrfachen Eigenwerten in Teilmatrizen 137
a) Ableitung der Einheits-Teilmatrizen 137
b) Zwei Hilfssätze 139
c) Nachweis der eindeutigen und vollständigen Zerlegung 140

2) Eigenlösungen ersten und höheren Grades 142
a) Erweiterter Begriff der Eigenlösung; Beispiel 142
b) Die Eigenlösungen zu einem $p(\omega)$-fachen Eigenwert 143

3) Matrizen, die nur Eigenlösungen ersten Grades besitzen 144
Beispiel 145
Anwendbarkeit der einzelnen Verfahren 145

4) Matrizen mit Eigenlösungen höheren Grades 147
a) Ergänzungsmatrizen 147
b) Konvergenz der Matrix $\mathfrak{A}^{\nu}$ 148
c) Anwendbarkeit der einzelnen Verfahren 149
Verfahren VI/VII (150) - IV,2 (150) - IV,3 (151) - IV,5 (152) - VIII (152) - V (152)

C. Eigenwerte gleicher Grösse, aber verschiedenen Vorzeichens 154-155
1) Konjugiert komplexe Eigenwerte 154
2) Entgegengesetzt gleiche Eigenwerte 155

Seite

X. Vergleichende Gegenüberstellung der verschiedenen Verfahren 156-175

1) Die Anzahl der erforderlichen Rechenoperationen 156
2) Die gesuchten Eigenwerte und Eigenlösungen 159
3) Eigenschaften der Matrix 159
   a) Elemente $a_{ik} = 0$ 159
   b) Symmetrie-Eigenschaften 160
   c) Matrizen mit dem ein- oder mehrfachen Eigenwert Null 161
   d) Ungeordnete Gleichungssysteme 161
   e) Weitere besondere Eigenschaften der Matrix 163
4) Vermeidung von Rechenfehlern 163
5) Berücksichtigung der technischen Hilfsmittel 164
6) Anforderungen an die Genauigkeit der Ergebnisse 166
   a) Erforderliche und erreichbare Genauigkeit 166
   b) Bestimmung des durch Ungenauigkeiten der gegebenen Matrix hervorgerufenen Fehlers in den Ergebnissen 168
   c) Die Ungenauigkeit der Rechnung 170
   d) Nachprüfung der Genauigkeit 171
7) Anwendungsbereiche der einzelnen Verfahren 171
   a) Allgemeine Verfahren 171
   b) Näherungsverfahren 173

E I N L E I T U N G .

Ein n-reihiges lineares Gleichungssystem von der Form

$$\begin{aligned}
(a_{11}-\lambda)x_1 &+ a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = 0\\
a_{21}x_1 &+ (a_{22}-\lambda)x_2 + a_{23}x_3 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = 0\\
a_{31}x_1 &+ a_{32}x_2 + (a_{33}-\lambda)x_3 + \ldots\ldots + a_{3n}x_n = 0 \qquad (1)\\
&\quad\ldots\ldots\ldots\\
a_{n1}x_1 &+ a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots\ldots + (a_{nn}-\lambda)x_n = 0
\end{aligned}$$

besitzt, abgesehen von dem Sonderfall, dass alle x_i verschwinden:

$$x_1 = x_2 = x_3 = \ldots\ldots = x_n = 0 ,$$

dann und nur dann eine Lösung, wenn der Parameter λ einen Wert besitzt, der die Hauptdeterminante des Gleichungssystems (1) zum Verschwinden bringt:

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} (a_{11}-\lambda) & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22}-\lambda) & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & (a_{33}-\lambda) & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & (a_{nn}-\lambda) \end{vmatrix} = 0 \quad . \qquad (2)$$

Die n "Eigenwerte" λ_1 , λ_2 , λ_3 , ..., λ_n , die dieser Gleichung, der "Säkulargleichung" genügen, kann man z.B. dadurch bestimmen, dass man die Determinante ausmultipliziert; man erhält eine Gleichung n-ten Grades für λ :

$$D(\lambda) \cdot (-1)^n = \lambda^n + k_1\cdot\lambda^{n-1} + k_2\cdot\lambda^{n-2} + \ldots\ldots + k_{n-1}\cdot\lambda + k_n = 0 \quad . \qquad (3)$$

Die n Wurzeln dieser Gleichung sind die Eigenwerte des Gleichungssystems (1).

Jedem Eigenwert entspricht eine "Eigenlösung" der Gleichungen (1), d.h. ein bestimmtes Verhältnis der Unbekannten $x_1 : x_2 : x_3 : \ldots : x_n$. Die absolute Grösse der Werte x_1, x_2, ..., x_n ist durch die Gleichungen (1) nicht festgelegt. Man kann die Eigenlösungen bestimmen, indem man die aus Gleichung (2) berechneten Eigenwerte in Gleichung (1) einsetzt.

Beispiel: Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
(10-\lambda)\,x + 10\,y + 0\cdot z &= 0\\
10\,x + (5-\lambda)\,y + 2\,z &= 0\\
0\cdot x + 2\,y + (1-\lambda)\,z &= 0.
\end{aligned}$$

a.) Bestimmung der Eigenwerte:

Durch Ausmultiplizieren der Säkulargleichung

$$\begin{vmatrix} (10-\lambda) & 10 & 0 \\ 10 & (5-\lambda) & 2 \\ 0 & 2 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

erhält man:

$$(10-\lambda)(5-\lambda)(1-\lambda) - 4(10-\lambda) - 100(1-\lambda) = 0 ,$$

also

$$\lambda^3 - 16\lambda^2 - 39\lambda + 90 = 0 .$$

Die drei Wurzeln dieser Gleichung kann man nach bekannten Verfahren berechnen und erhält die Werte:

$$\lambda_1 = 17{,}898 \; ; \; \lambda_2 = 3{,}384 \; ; \; \lambda_3 = 1{,}486 .$$

b.) Bestimmung der Eigenlösungen:

Es soll z.B. die zu $\lambda_1 = 17{,}898$ gehörige Eigenlösung bestimmt werden. Durch Einsetzen dieses Eigenwertes in die Gleichungen (1) erhält man:

$$\begin{aligned} -7{,}898\,x + 10\,y &= 0 \\ 10\,x - 12{,}898\,y + 2\,z &= 0 \\ 2\,y - 16{,}898\,z &= 0 . \end{aligned}$$

Von diesen drei homogenen Gleichungen sind nur zwei erforderlich, um das Verhältnis der Grössen x,y,z zu berechnen. Man erhält aus zwei beliebigen, z.B. aus der ersten und zweiten Gleichung:

$$x : y : z = \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ -12{,}898 & 2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 0 & -7{,}898 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} -7{,}898 & 10 \\ 10 & -12{,}898 \end{vmatrix} =$$

$$= 20 : 15{,}796 : 1{,}870 = 1 : 0{,}7898 : 0{,}0935 .$$

Ebenso findet man die beiden anderen Eigenlösungen, indem man $\lambda_2 = -3{,}384$ bzw. $\lambda_3 = 1{,}486$ in die Gleichungen (1) einsetzt; man erhält:

für λ_2: $x : y : z = 1 : -1{,}3384 : 0{,}6106$,

und für λ_3: $x : y : z = 1 : -0{,}8514 : -3{,}5115$.

Das Zahlenbeispiel zeigt, dass bereits bei einem dreireihigen Gleichungssystem für die Berechnung der Eigenwerte und Eigenlösungen eine beträchtliche Rechenarbeit nötig ist.

Bei vier- oder mehrreihigem Gleichungssystem steigt der erforderliche Arbeitsaufwand auf ein Vielfaches.

Besonders das Ausmultiplizieren der Säkulardeterminante ist bei vielreihigen Gleichungssystemen eine sehr unbequeme und zeitraubende Arbeit. Man hat daher bereits verschiedentlich Berechnungsverfahren angegeben, deren Zweck es ist, entweder das Aus-

multiplizieren der Säkulardeterminante zu vereinfachen und zu beschleunigen oder unmittelbar aus den Koeffizienten des Gleichungssystems ohne Benutzung der Säkulargleichung die gesuchten Eigenwerte und Eigenlösungen zu berechnen.

Die Aufgabe der vorliegenden Arbeit ist es zunächst, einige praktisch brauchbare Verfahren zur rechnerischen Ermittlung der Eigenwerte und Eigenlösungen zu entwickeln und an einfachen Zahlenbeispielen zu erläutern. Ein grosser Teil dieser Verfahren scheint bisher nicht bekannt zu sein. Einige andere bereits bekannte Verfahren konnten vereinfacht, ergänzt und durch systematische und übersichtliche Anordnung des Rechnungsganges den praktischen Bedürfnissen besser angepasst werden.

Eine weitere Aufgabe der vorliegenden Arbeit besteht darin, die verschiedenen Verfahren vergleichend einander gegenüberzustellen. Dabei zeigt es sich, dass man nicht etwa irgendein bestimmtes Verfahren schlechthin als das "beste" oder "zweckmässigste" bezeichnen kann. Vielmehr wird je nach der Art der Aufgabe und den gerade vorliegenden Umständen bald das eine, bald das andere Verfahren besser geeignet erscheinen.

In jedem Einzelfall wird man ein Verfahren wählen, das möglichst rasch und sicher, bequem und übersichtlich, in möglichst einfacher Weise und mit ausreichender Genauigkeit zum Ziel führt.

In erster Linie kommt es darauf an, dass möglichst wenig Rechenarbeit benötigt wird. Um den erforderlichen Arbeitsaufwand in jedem Fall abschätzen und die verschiedenen Verfahren miteinander vergleichen zu können, soll im folgenden bei der Betrachtung der einzelnen Verfahren die Anzahl der jeweils erforderlichen Rechenoperationen angegeben werden. Es mag dabei im allgemeinen genügen, die Multiplikationen und die Divisionen zu berücksichtigen, da diese meistens den grössten Anteil der Rechenarbeit ausmachen.- Die Additionen und die Subtraktionen fallen im allgemeinen weniger ins Gewicht (vergl. Abschn. X). Ihre Gesamtzahl ist meistens etwas geringer als die der Multiplikationen und Divisionen.

I. SYSTEMATISCHES AUSMULTIPLIZIEREN DER SAEKULARDETERMINANTE.

In vielen Fällen wird man zur Berechnung der Eigenwerte wohl am zweckmässigsten den in der Einleitung beschriebenen Weg benutzen. Wichtig ist es dann allerdings, dass man durch günstige Anordnung der Rechnung den Arbeitsaufwand auf das erforderliche Mindestmass beschränkt. Das gilt vor allem für das Ausmultiplizieren der Säkulardeterminante.

Einige Hinweise für eine möglichst zweckmässige Durchführung der Berechnung werden im folgenden gegeben. Ferner soll die Anzahl der jeweils erforderlichen Rechenoperationen, insbesondere die der Multiplikationen und Divisionen festgestellt werden.

Das Ausmultiplizieren der Säkulardeterminante kann in ähnlicher Weise durchgeführt werden wie bei gewöhnlichen Determinanten.

Für das Ausmultiplizieren einer zweireihigen Säkulardeterminante sind 2 Multiplikationen, ausserdem 2 Summenbildungen (Additionen oder Subtraktionen) aus je zwei Zahlen erforderlich:
Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 3{,}5-\lambda & 1{,}1 \\ 1{,}7 & 2{,}4-\lambda \end{vmatrix} = (3{,}5 \cdot 2{,}4 - 1{,}1 \cdot 1{,}7) - (3{,}5+2{,}4)\lambda + \lambda^2 = 6{,}53 - 5{,}9\lambda + \lambda^2 .$$

Für das Ausmultiplizieren von Säkulardeterminanten dritter oder höherer Ordnung können, ebenso wie bei der Berechnung gewöhnlicher Determinanten, verschiedene Verfahren benutzt werden.

a) Ausmultiplizieren der einzelnen Glieder.

Die Determinante kann dadurch berechnet werden, dass man ihre n! Glieder einzeln berechnet und addiert.
Beispiel: Zu berechnen sei die Säkulardeterminante dritter Ordnung

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} (6-\lambda) & 3 & 8 \\ 2 & (7-\lambda) & -4 \\ 4 & 3 & (10-\lambda) \end{vmatrix} .$$

Die einzelnen Glieder sind:

$$\begin{aligned}
(6-\lambda)\,(7-\lambda)\,(10-\lambda) &= (42-13\lambda+\lambda^2)\,(10-\lambda) = 420-172\lambda+23\lambda^2-\lambda^3 \\
3 \cdot (-4) \cdot 4 &= -48 \\
8 \cdot 2 \cdot 3 &= 48 \\
-(6-\lambda) \cdot (-4) \cdot 3 &= 12\,(6-\lambda) = 72 - 12\lambda \\
-3 \cdot 2 \cdot (10-\lambda) &= -6\,(10-\lambda) = -60 + 6\lambda \\
-8 \cdot (7-\lambda) \cdot 4 &= -32\,(7-\lambda) = -224 + 32\lambda \\
\text{also } D(\lambda) &= 308-146\lambda+23\lambda^2-\lambda^3 .
\end{aligned}$$

Für die Berechnung einer dreireihigen Säkulardeterminante sind in diesem Rechnungsgang folgende Rechnungen erforderlich

zur Berechnung des 1. Gliedes: 3 Multiplikationen, 3 Additionen,
" " " 2.-6. " 5.2 "
für die Addition der 6 Glieder 5+3 "

zusammen 13 Multiplikationen, 11 Additionen,

wobei ein Produkt oder eine Summe aus n Zahlen jeweils wie (n-1) Einzelmultiplikationen bzw. -additionen aus je 2 Zahlen gewertet werden.

Für die Berechnung einer vierreihigen Säkulardeterminante aus ihren 24 Gliedern wären bereits

81 Multiplikationen und 55 Additionen,

für eine fünfreihige schon

536 Multiplikationen und 294 Additionen,

allgemein für eine n-reihige Säkulardeterminante ($n \geq 2$):

$n! \cdot (n-\frac{1}{2}) - (n-1)$ Multiplikationen und

$\frac{5}{2} \cdot n! - (n+1)$ Additionen

je zweier Zahlen notwendig. Das Verfahren kommt daher schon für vierreihige Säkulardeterminanten kaum, für $n>4$ überhaupt nicht in Betracht.

b) Entwickeln nach Unterdeterminanten.

Solche Glieder der Determinante, die einen gemeinsamen Faktor enthalten, können, ehe man sie mit dem betreffenden Faktor multipliziert, zueinander addiert und dann gemeinsam mit diesem Faktor multipliziert werden.

Bei einer dreireihigen Säkulardeterminante berechnet man z.B. in zwei Zeilen die drei Unterdeterminanten zweiter Ordnung und multipliziert diese mit den komplementären Elementen der dritten Zeile.

Anwendung auf obiges Zahlenbeispiel:

$$\begin{vmatrix} (6-\lambda) & 3 \\ 3 & (7-\lambda) \end{vmatrix} \cdot (10-\lambda) = (36-13\lambda+\lambda^2) \cdot (10-\lambda) = 360-166\lambda+23\lambda^2-\lambda^3$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ (7-\lambda) & -4 \end{vmatrix} \cdot 4 = (-68+8\lambda) \cdot 4 = -272+32\lambda$$

$$\begin{vmatrix} 8 & (6-\lambda) \\ -4 & 3 \end{vmatrix} \cdot 3 = (40-4\lambda) \cdot 3 = 120-12\lambda$$

$$208-146\lambda+23\lambda^2-\lambda^3 .$$

Die Anzahl der erforderlichen Rechenoperationen beträgt in diesem Fall

$$6 + 6 = 12 \text{ Multiplikationen},$$
$$4 + 6 = 10 \text{ Additionen}.$$

Der Arbeitsaufwand unterscheidet sich kaum von demjenigen bei gliedweisem Ausmultiplizieren.

Bei vier- oder mehrreihigen Säkulardeterminanten kann man so vorgehen, dass man zuerst in zwei Zeilen sämtliche $\frac{n(n-1)}{2}$ Unterdeterminanten zweiter Ordnung berechnet, dann nimmt man eine dritte Zeile hinzu und berechnet alle in diesen drei Zeilen enthaltenen Unterdeterminanten dritter Ordnung, dann mit einer vierten Zeile die Unterdeterminanten vierter Ordnung usw.

Bei diesem Rechnungsgang sind z.B. für eine vierreihige Säkulardeterminante

46 Multiplikationen, 37 Additionen,

für eine fünfreihige

145 Multiplikationen, 117 Additionen,

und allgemein für eine n-reihige ($n \geq 2$)
$n(n+3).2^{n-3} - \frac{n(n+1)}{2}$ Multiplikationen und $(n^2+2n-6).2^{n-3}+1$ Additionen notwendig.

Allerdings ist bei der Anwendung dieses Verfahrens für $n \geq 4$ die Rechnung ziemlich unübersichtlich und führt daher leicht zu Rechenfehlern (besonders Vorzeichenfehlern); das Verfahren ist daher schon für vierreihige, besonders aber für fünf- und mehrreihige Säkulardeterminanten nicht sehr zu empfehlen. Bei vierreihigen Säkulardeterminanten kann man auch aus zwei Zeilen die Unterdeterminanten zweiter Ordnung und aus den beiden anderen Zeilen die dazu komplementären Unterdeterminanten zweiter Ordnung berechnen. Dann sind insgesamt erforderlich

45 Multiplikationen, 35 Additionen.

c) Umwandlung der Säkulardeterminante in eine Determinante niederer Ordnung (Eliminations-Verfahren).

Das gebräuchlichste Verfahren zur Berechnung einer gewöhnlichen Determinante n-ter Ordnung besteht darin, dass man die Determinante auf eine solche von (n-1)-ter Ordnung zurückführt: eine Zeile der Determinante wird, mit bestimmten Faktoren multipliziert, zu den übrigen (n-1) Zeilen hinzu addiert; die betreffenden Faktoren werden so gewählt, dass in jeder der n-1 Zeilen ein bestimmtes Element (z.B. dasjenige der ersten Spalte) verschwindet.

z.B.: $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} ,$$

wobei

$$b_{ik} = a_{ik} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1k} .$$

Verfahren dieser Art, bei denen einzelne Zeilen und Spalten der Determinante eliminiert werden, sollen als "Eliminationsverfahren" bezeichnet werden. (Genau die gleiche Rechnung wird beim Eliminieren einzelner Unbekannten aus einem gewöhnlichen linearen Gleichungssystem angewandt).

In ähnlicher Weise kann man auch bei der Berechnung einer n-reihigen Säkulardeterminante vorgehen.
Man multipliziert z.B. die unterste Zeile mit den Faktoren

$$-\frac{a_{11}-\lambda}{a_{n1}} \quad , \quad -\frac{a_{21}}{a_{n1}} \quad , \ldots . \quad -\frac{a_{(n-1)1}}{a_{n1}}$$

und addiert sie zu der 1., 2., ... (n-1)ten Zeile der Säkulardeterminante.

Eine dreireihige Säkulardeterminante wird durch diese Umformung auf eine zweireihige Determinante zurückgeführt.
Beispiel:

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} (6-\lambda) & 3 & 8 \\ 2 & (7-\lambda) & -4 \\ 4 & 3 & (10-\lambda) \end{vmatrix}$$

Die dritte Zeile wird mit den Faktoren

$$-\frac{6-\lambda}{4} = -1{,}5 + 0{,}25\lambda \quad \text{bzw.} \quad -\frac{2}{4} = -0{,}5$$

multipliziert und zu der ersten bzw. zweiten Zeile hinzu addiert.
Man erhält

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & 3+(-4{,}5+0{,}75\lambda) & 8+(-15+4\lambda-0{,}25\lambda^2) \\ 0 & (7-\lambda)-1{,}5 & -4+(-5+0{,}5\lambda) \\ 4 & 3 & (10-\lambda) \end{vmatrix}$$

$$= 4 \cdot \begin{vmatrix} -1{,}5 + 0{,}75\lambda & -7 + 4\lambda - 0{,}25\lambda^2 \\ 5{,}5 - \lambda & -9 + 0{,}5\lambda \end{vmatrix}$$

$$= 4 \cdot \left((13{,}5 - 7{,}5\lambda + 0{,}375\lambda^2) - (-38{,}5 + 29\lambda - 5{,}375\lambda^2 + 0{,}25\lambda^3)\right)$$

$$= 4 \cdot (52 - 36{,}5\lambda + 5{,}75\lambda^2 - 0{,}25\lambda^3)$$

$$= 208 - 146\lambda + 23\lambda^2 - \lambda^3 \quad .$$

Das Zahlenbeispiel zeigt, dass sich dieses Verfahren, verglichen mit den beiden vorher beschriebenen Verfahren, für die Berechnung einer d r e i reihigen Säkulardeterminante schlecht eignet. Es ist umständlicher und erfordert auch eine grössere Anzahl von Rechenoperationen. - Für die Umwandlung der dreireihigen Determinante in eine zweireihige wurden gebraucht

3 Divisionen, 6 Multiplikationen, 5 Additionen,

und für das Ausmultiplizieren der zweireihigen Determinante

7 Multiplikationen, 6 Additionen.

Falls gewünscht wird, dass die höchste Potenz von λ (also λ^3) den Koeffizienten 1 hat, so kommen noch hinzu

3 Multiplikationen oder Divisionen ,

---

zusammen 19 Multiplikationen und Divisionen, 11 Additionen.

In derselben Weise kann man eine Säkulardeterminante vierter Ordnung erst in eine dreireihige, dann in eine zweireihige Determinante umwandeln; Säkulardeterminanten fünfter oder sechster Ordnung können auf dreireihige Determinanten zurückgeführt werden. Unter der Voraussetzung, dass der Rechnungsgang genau dem oben (für n = 3) gezeigten entspricht, beträgt die Anzahl der erforderlichen Multiplikationen und Divisionen

bei n =	3	4	5	6
für die Umwandlung in eine zwei- bzw. dreireihige Determinante	9	2·16	2·25	3·36
für das Ausmultiplizieren dieser Determinante	7	18	58	99
für das Dividieren durch den Koeffizienten von λ^n	3	4	5	6
insgesamt	19	54	113	213

Die Zahlentabelle zeigt, dass dieses Verfahren für fünf- und sechsreihige Determinanten weit weniger Arbeit erfordert, als die beiden zuerst gezeigten Verfahren (Ia und b).

Das Eliminations-Verfahren eignet sich auch gut für die Berechnung von Säkulardeterminanten höherer Ordnung. Allerdings sind dann gewisse Aenderungen notwendig.

Auch für Säkulardeterminanten dritter bis sechster Ordnung kann das geschilderte Verfahren in mancherlei Weise abgeändert werden; durch geschickte Anordnung der Rechnungen kann man die Anzahl der erforderlichen Operationen noch beträchtlich vermindern.

d) Verbessertes Eliminations-Verfahren.

Ein solches verbessertes Eliminations-Verfahren, das für Säkulardeterminanten beliebiger Ordnung anwendbar ist und wohl stets (ausgenommen den Fall $n = 3$) die geringste Anzahl von Rechenoperationen erfordert, soll beschrieben werden.

Bei dem unter c) gezeigten Verfahren wird jedesmal beim Uebergang auf eine Determinante geringerer Ordnung ein Faktor aus der Determinante ausgeschieden (in dem obigen Zahlenbeispiel mit $n = 3$ ist es der Faktor $a_{31} = 4$), mit dem die Determinante nachträglich wieder multipliziert werden muss. Man kann dieses Nachmultiplizieren umgehen, wenn man jedesmal im voraus eine der nicht verschwindenden Zeilen der Determinante mit dem betreffenden Faktor multipliziert.

Bei der dreireihigen Determinante

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} (a_{11}-\lambda) & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & (a_{22}-\lambda) & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & (a_{33}-\lambda) \end{vmatrix}$$

wird am zweckmässigsten die erste Zeile mit a_{31} multipliziert; die dritte Zeile muss dann mit $-(a_{11}-\lambda)$ bzw. mit $-\frac{a_{21}}{a_{31}}$ multipliziert und zur ersten bzw. zweiten Zeile hinzu addiert werden.
Man erhält:

$$D(\lambda) = \frac{1}{a_{31}} \cdot \begin{vmatrix} 0 & a_{31}a_{12} - (a_{11}-\lambda)a_{32} & a_{31}a_{13} - (a_{11}-\lambda)\cdot(a_{33}-\lambda) \\ 0 & (a_{22}-\lambda) - q\cdot a_{32} & a_{23} - q\cdot(a_{33}-\lambda) \\ a_{31} & a_{32} & (a_{33}-\lambda) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (a_{31}a_{12} - a_{11}a_{32}) + a_{32}\cdot\lambda & (a_{31}a_{13} - a_{11}a_{33}) + (a_{11}+a_{33})\cdot\lambda - \lambda^2 \\ (a_{22} - q\cdot a_{32}) - \lambda & (a_{23} - qa_{33}) + q\cdot\lambda \end{vmatrix},$$

worin zur Abkürzung gesetzt ist $q = \frac{a_{21}}{a_{31}}$.

Zahlenbeispiel:

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} (6-\lambda) & 3 & 8 \\ 2 & (7-\lambda) & -4 \\ 4 & 3 & (10-\lambda) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3.4 - 3(6-\lambda) & 8.4 - (10-\lambda)(6-\lambda) \\ 0 & (7-\lambda) - 2/4 \cdot 3 & -4 - 2/4 \cdot (10-\lambda) \\ 1 & 3/4 & (10-\lambda)/4 \end{vmatrix},$$

$$= (-6+3\lambda) \cdot (-9+0{,}5\lambda) - (5{,}5-\lambda) \cdot (-28+16\lambda-\lambda^2)$$

$$= (54-30\lambda+1{,}5\lambda^2) - (-154+116\lambda-21{,}5\lambda^2+\lambda^3)$$

$$= 208 - 146\lambda + 23\lambda^2 - \lambda^3 .$$

Hierfür sind nur folgende Multiplikationen und Divisionen erforderlich:

Zur Umformung der ersten Zeile — 4 Multiplikationen,
" " " zweiten " — 1 Division, 2 Multiplikationen,
Zum Ausmultiplizieren der zweireihigen Determinante — 4+2 = 6 Multiplikationen, (wobei nur die Multiplikationen zweier von 1 verschiedener Zahlen berücksichtigt sind).

Insgesamt sind also statt 19 hier nur 13 Multiplikationen und Divisionen nötig.

Bei der Berechnung von Säkulardeterminanten höherer Ordnung empfiehlt es sich, nach folgenden Regeln vorzugehen:

1.) In der Säkulardeterminante

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} (a_{11}-\lambda) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22}-\lambda) & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & (a_{nn}-\lambda) \end{vmatrix}$$

wird die erste Zeile mit a_{n1} multipliziert; die n-te Zeile wird dazu benutzt, aus der ersten bis (n-1)-ten Zeile das erste Element zu eliminieren.*)

2.) In der so gefundenen Determinante (n-1)-ter Ordnung wird zunächst aus dem ersten Element der ersten Zeile die Unbekannte λ eliminiert, indem man ein Vielfaches der zweiten Zeile hinzu addiert; dann wird die zweite Zeile mit dem ersten Element der (n-1)-ten (jetzt untersten) Zeile multipliziert; die (n-1)-te Zeile wird benutzt, um aus der ersten bis (n-2)-ten Zeile die Elemente der vordersten Spalte zu eliminieren.

*) Das Produkt $(a_{11}-\lambda) \cdot a_{n1}$, das bei der Elimination wegfällt, braucht dabei nicht berechnet zu werden.

3.) Allgemein: in der gefundenen Determinante (n-k)-ter Ordnung wird (solange $k \leq \frac{n}{2} - 1$) aus den Anfangselementen der ersten k Zeilen mit Hilfe der (k+1)-ten Zeile die Unbekannte λ eliminiert; dann wird die (k+1)-te Zeile mit dem Anfangselement der (n-k)-ten (also jedesmal der untersten) Zeile multipliziert; mittels dieser untersten Zeile wird aus allen übrigen Zeilen das Anfangselement eliminiert.

4.) Ist die Säkulardeterminante auf eine Determinante $\frac{n}{2}$-ter oder geringerer Ordnung zurückgeführt, so treten in der ersten Spalte auch Potenzen von λ auf. Falls die höchste dieser Potenzen in mehreren Elementen der ersten Spalte vorkommt, so muss man mit Hilfe einer der betreffenden Zeilen zunächst diese höchste λ - Potenz (λ^p) aus den übrigen Anfangselementen eliminieren. Man benutzt für diese Elimination von den in Betracht kommenden Zeilen am besten stets diejenige, die die wenigsten von 1 verschiedener Koeffizienten enthält; durch diese Wahl erhält man die geringst mögliche Anzahl von Rechenoperationen.

Nachdem die Potenz λ^p nur noch in einem Element der ersten Spalte vorkommt, wird eine neue Zeile mit möglichst geringer Koeffizientenanzahl ausgewählt, die in ihrem Anfangselement die nächst niedrigere λ-Potenz, also λ^{p-1} enthält. Mit Hilfe dieser Zeile wird aus den Anfangselementen aller übrigen Zeilen die Potenz λ^{p-1} eliminiert. Aus derjenigen (einzigen) Zeile, die in ihrem Anfangselement auch noch die Potenz λ^p enthält, werden in der gleichen Weise die Potenzen λ^p und λ^{p-1} eliminiert; jedoch ist diese Zeile zuvor mit dem Faktor $-\frac{a_{p-1}}{a_p}$ zu multiplizieren, wobei

a_p der Koeffizient von λ^p im Anfangselement dieser Zeile, und
a_{p-1} der Koeffizient von λ^{p-1} im Anfangselement der zur Elimination benutzten Zeile ist.

Auf diese Weise werden nacheinander alle λ-Potenzen und schliesslich auch die übrig bleibenden konstanten Elemente der ersten Spalte eliminiert; man erhält eine neue Determinante, deren Ordnung um 1 verringert ist.

5.) Diese Umformungen in Determinanten geringerer Ordnung werden solange fortgesetzt, bis man zu einer zweireihigen Determinante gelangt, die dann ohne Schwierigkeit ausmultipliziert werden kann.

Zur Beurteilung des erforderlichen Arbeitsaufwandes soll wieder die jeweils notwendige Anzahl der Multiplikationen und Divisionen festgestellt werden. Die Zahl der erforderlichen Additionen, die nicht besonders angegeben wird, stimmt bei diesem Verfahren fast genau mit der der Multiplikationen überein.

Zur Umwandlung der n-reihigen Säkulardeterminante in eine Determinante (n-1)-ter Ordnung werden bei Befolgung der obigen Regel 1 für die

Umformung der ersten Zeile 2(n-1) Multiplikationen,
für jede weitere Zeile 1 Division und (n-1)Multiplikationen,
insgesamt also (n-2) Divisionen und n(n-1) Multiplikationen gebraucht.

Für die Umformung der (n-1)-reihigen Determinante in eine (n-2)-reihige sind

(n-3) Divisionen und $n+(n-1)^2 = (n^2-n+1)$ Multiplikationen,

allgemein für die Umformung der (n-k)-reihigen Determinante in eine (n-k-1)-reihige (solange $k \leqq \frac{n}{2} - 1$):

(n-k-2) Divisionen und (n^2-n+k) Multiplikationen erforderlich.

Die Gesamtzahl der Multiplikationen und Divisionen beträgt also bei jeder dieser Umformungen (n^2-2).

Im Fall $k > \frac{n}{2} - 1$ sind bei jeder weiteren Umformung insgesamt mindestens (n^2-1) Multiplikationen und Divisionen nötig.

Die genaue Zahl der erforderlichen Multiplikationen und Divisionen beträgt bei jeder Umformung von einer m-reihigen Determinante in eine (m-1)-reihige $(m < \frac{n}{2} + 1)$:

$$n^2 + \text{Rest}\left(\frac{n+1}{m}\right) \cdot \left(m - \text{Rest}\left(\frac{n+1}{m}\right)\right) - 1 \,, \qquad (4)$$

wenn $\text{Rest}(\frac{a}{b})$ der ganzzahlige Rest ist, der bei der Division der beiden ganzen Zahlen a und b übrig bleibt:

$$0 \leqq \text{Rest}\left(\frac{a}{b}\right) < b \,.$$

Die Anzahl der, in dem Ausdruck (4) bereits mitgezählten Divisionen beträgt

$$n - 1 - \text{Rest}\left(\frac{n}{m}\right) .$$

Das Ausmultiplizieren der zweireihigen Determinante erfordert noch

$$\frac{n(n+1)}{2} \quad \text{Multiplikationen.}$$

Die Gesamtzahl der Multiplikationen und Divisionen beträgt demnach für gerade n $(n \geqq 4)$:

$$\frac{n}{2}(n^2-2) + (\frac{n}{2}-2)\cdot(n^2-1) + \Sigma + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= n^3 - \frac{3}{2}n^2 - n + 2 + \Sigma \,, \qquad (5)$$

und für ungerade n:

$$\frac{n+1}{2}(n^2-2) + \left(\frac{n-1}{2}-2\right)\cdot(n^2-1) + \Sigma + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= (n^2-1)\cdot\left(n-\tfrac{3}{2}\right) + \Sigma, \qquad (6)$$

wobei Σ zur Abkürzung geschrieben ist für

$$\sum\left(\text{Rest}\left(\frac{n+1}{m}\right)\cdot\left(m-\text{Rest}\left(\frac{n+1}{m}\right)\right)\right).$$

$m = 3, 4, \ldots, \frac{n}{2}$

bzw. $m = 3, 4, \ldots, \frac{n+1}{2}$

n =	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Σ =	0	2	3	9	16	18	35	47	58

n =	3	5	7	9	11	13	15	17	19
Σ =	0	0	2	6	6	18	24	34	46

Die Gesamtzahl der erforderlichen Multiplikationen und Divisionen ist für verschiedene n in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

n =	3	4	5	6	7	8	9	10
Anzahl der Multiplikationen	12	35	78	146	247	383	566	797
Divisionen	1	3	6	14	19	30	40	54
zusammen	13	38	84	160	266	413	606	851

Die Tabelle zeigt, dass hier bereits für die Berechnung vierreihiger Säkulardeterminanten ein geringerer Arbeitsaufwand nötig ist, als bei Benutzung eines der vorher beschriebenen Verfahren. Erst recht zeigt sich die Arbeitsersparnis bei Säkulardeterminanten fünfter oder höherer Ordnung. Die einzige Ausnahme bildet der Fall n = 3; für dreireihige Säkulardeterminanten sind wohl die reinen Multiplikationsverfahren Ia und b besser geeignet.

Nachdem die Säkulardeterminante ausmultipliziert, d.h. in eine gewöhnliche Gleichung n-ten Grades (Gleichung 3) umgeformt ist,

bereitet die weitere Rechnung keine besonderen Schwierigkeiten. Für die Auflösung der Gleichung (3) nach λ kommen hauptsächlich Näherungsverfahren in Betracht.

Will man auch die Eigenlösungen berechnen, so kann dies z.B. durch Auflösung des homogenen Gleichungssystems (1) geschehen, indem man für λ den betreffenden Eigenwert einsetzt. Für die gleichzeitige Berechnung mehrerer Eigenlösungen eignet sich oft auch das im Abschnitt V behandelte Verfahren.

II. SYSTEMATISCHE BERECHNUNG DER HAUPTUNTERDETERMINANTEN.

Ein weiteres Verfahren zur Berechnung der Säkulardeterminante, das oft sehr rasch und bequem zum Ziel führt, hat M e h m k e [+]) vorgeschlagen.

Die Koeffizienten k_r (r=1,2, ...,n) der Gleichung (3) stehen mit den Elementen der Determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

in einem einfachen Zusammenhang. Es ist

$$k_r = (-1)^r \cdot s_r ,$$

wenn s_r die Summe sämtlicher Hauptunterdeterminanten r-ter Ordnung in der Determinante D ist.

Insbesondere ist

$$k_1 = -s_1 = -\sum_{i=1,2,\dots,n} a_{ii} ,$$

(7)

$$k_2 = s_2 = \sum_{k>i} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ik} \\ a_{ki} & a_{kk} \end{vmatrix} ,$$

(Die Einschränkung k>i bedeutet, dass jede Unterdeterminante nur einmal in der Summe vorkommt.)

. . . . . .

$$k_n = (-1)^n \cdot s_n = (-1)^n \cdot D.$$

Es ist also notwendig, die sämtlichen Hauptunterdeterminanten erster bis n-ter Ordnung zu ermitteln. Das sind z.B. bei einem fünfreihigen Gleichungssystem

1 Determinante fünfter Ordnung,
$\binom{5}{1} = 5$ " vierter " ,
$\binom{5}{2} = 10$ " dritter " ,
$\binom{5}{3} = 10$ " zweiter " ,
$\binom{5}{4} = 5$ " erster " ,

[+]) Mehmke, praktische Lösung der Grundaufgaben ... (Math. Ann. 103, Seite 300 ff)

also insgesamt, wenn man die Diagonalelemente a_{11} , a_{22} ... als Unterdeterminanten erster Ordnung mitzählt,

$$2^5 - 1 = 31 \text{ Determinanten;}$$

die Anzahl der zu berechnenden Determinanten zweiter bis n-ter Ordnung beträgt also

$$2^n - (n+1).$$

Mehmke hat bereits darauf hingewiesen, dass man diese Determinante "treppenweise" berechnen und hierdurch einen beträchtlichen Teil der Arbeit sparen kann. In folgendem soll gezeigt werden, wie man dabei am zweckmässigsten vorgeht, um die erforderliche Rechenarbeit auf ein Minimum zu beschränken.

Die Berechnung der Hauptdeterminante

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

geschieht in bekannter Weise:

Die erste Zeile wird der Reihe nach mit $\frac{-a_{i1}}{a_{11}}$

(i = 2,3,...,n) multipliziert und zu der i-ten Zeile addiert. Bei dieser Umformung bleibt der Wert der Determinante unverändert; in der ersten Spalte verschwinden alle Koeffizienten ausser a_{11}. Man erhält also:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ 0 & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

wobei

$$b_{ik} = a_{ik} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} \cdot a_{1k} = \frac{1}{a_{11}} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1k} \\ a_{i1} & a_{kk} \end{vmatrix}.$$

Die so erhaltene (n-1)-reihige Determinante wird in derselben Weise auf eine (n-2)-reihige zurückgeführt:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & b_{22} & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & c_{33} \cdots & c_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & c_{n3} \cdots & c_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot b_{22} \cdot \begin{vmatrix} c_{33} & \cdots\cdots & c_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n3} & \cdots\cdots & c_{nn} \end{vmatrix},$$

wobei

$$c_{ik} = b_{ik} - \frac{b_{i2}}{b_{22}} \cdot b_{2k} = \frac{1}{b_{22}} \cdot \begin{vmatrix} b_{22} & b_{2k} \\ b_{i2} & b_{ik} \end{vmatrix} .$$

Das Verfahren wird fortgesetzt, bis alle Elemente unterhalb der Hauptdiagonale zum Verschwinden gebracht sind:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots & a_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \cdots & b_{2n} \\ 0 & 0 & c_{33} \cdots & c_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots & g_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot b_{22} \cdot c_{33} \cdot \ldots \cdot g_{nn} .$$

Indem man diesen Weg zur Berechnung der Hauptdeterminante benutzt, erhält man als Nebenergebnisse bereits eine grosse Anzahl der ebenfalls benötigten Hauptunterdeterminanten zweiter bis (n-1)-ter Ordnung und zwar:

alle Hauptunterdeterminanten zweiter Ordnung, an denen die erste Zeile beteiligt ist:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1i} \\ a_{i1} & a_{ii} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot b_{ii} \qquad (i = 2, 3, \ldots n);$$

alle Hauptunterdeterminanten dritter Ordnung, an denen die ersten beiden Zeilen beteiligt sind:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2i} \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{ii} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot b_{22} \cdot c_{ii} \quad (i = 3, 4, \ldots n);$$

allgemein:

alle Hauptunterdeterminanten r-ter Ordnung, an denen die ersten (r-1) Zeilen beteiligt sind.

Beweis:

Der Wert einer Determinante bleibt unverändert, wenn zu einer ihrer Zeilen ein Vielfaches einer anderen Zeile addiert wird.

Das gilt nicht nur für die Hauptdeterminante, sondern auch für sämtliche Unterdeterminanten zweiter bis n-ter Ordnung, vorausgesetzt, dass die hinzugefügte Zeile selbst ebenfalls der betreffenden Unterdeterminante angehört.

Die noch fehlenden Hauptunterdeterminanten können ebenfalls systematisch nach einer genau festgelegten Anordnung berechnet werden. Der Gang der Rechnung ist aus dem folgenden Zahlenbeispiel zu erkennen:

Gegeben sei folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
(10-\lambda)\,x + 8\,y - 7\,z - 8\,t &= 0\\
6\,x + (4-\lambda)\,y - 3\,z - 6\,t &= 0\\
3\,x - 3\,y + (4-\lambda)\,z - 3\,t &= 0\\
3\,x + 5\,y - 4\,z + (-1-\lambda)\,t &= 0\ .
\end{aligned}$$

Rechnungsgang:

$$\begin{vmatrix} 10 & 8 & -7 & -8 \\ 6 & 4 & -3 & -6 \\ 3 & -3 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & -4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & & & \\ & -0{,}8 & 1{,}2 & -1{,}2 \\ & -5{,}4 & 6{,}1 & -0{,}6 \\ & 2{,}6 & -1{,}9 & 1{,}4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & & & \\ & -0{,}8 & & \\ & & -2{,}0 & 7{,}5 \\ & & 2{,}0 & -2{,}5 \end{vmatrix} =$$

$$= 10 \cdot -0{,}8 \cdot -10$$

$$10 \cdot \begin{vmatrix} 6{,}1 & -0{,}6 \\ -1{,}9 & 1{,}4 \end{vmatrix} = 10 \cdot 7{,}4$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & -6 \\ -3 & 4 & -3 \\ 5 & -4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & & \\ & 1{,}75 & -7{,}5 \\ & -0{,}25 & 6{,}5 \end{vmatrix} = 4 \cdot 9{,}5$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = -16\ .$$

Erläuterung:

Drei- oder mehrreihige Determinanten werden berechnet, indem man sie auf Determinanten geringerer Ordnung zurückführt. Zweireihige Determinanten werden im allgemeinen am zweckmässigsten durch gliedweises Ausmultiplizieren berechnet:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc\ .$$

Durch Ausmultiplizieren erhält man folgende Werte für die Determinante und die gesuchten Unterdeterminanten:

Hauptunterdet. 1. Ordnung: 10, 4, 4, -1. $s = 17$

" 2. " : -8, 61, 14; 7, 26; -16. $s = 84$

" 3. " : 16, 20; 74; 38. $s = 148$

Hauptdeterm. (4. "): 80; $s = 80$.

Die bei diesem Verfahren erforderliche Rechenarbeit lässt sich leicht überblicken.

Um eine n-reihige Determinante mit ihren sämtlichen Hauptunterdeterminanten zu berechnen, muss man diese zunächst in eine (n-1)-reihige Determinante umwandeln; hiernach sind noch folgende zwei (n-1)-reihige Determinanten mit ihren sämtlichen Hauptunterdeterminanten zu berechnen:

1.) Die durch die Elimination der ersten Spalte errechnete (n-1)-reihige Determinante; aus ihr kann die Hauptdeterminante sowie sämtliche Hauptunterdeterminanten, an denen das Element a_{11} beteiligt ist, berechnet werden.

2.) Die durch Weglassung der ersten Zeile und der ersten Spalte übrig-bleibende Unterdeterminante (n-1)-ter Ordnung; sie enthält sämtliche Hauptunterdeterminanten, an denen das Spitzenelement a_{11} nicht beteiligt ist.

Jede dieser (n-1)-reihigen Determinanten führt wieder auf die Berechnung zweier (n-2)-reihiger Determinanten usw.. Insgesamt sind also folgende Umformungen erforderlich:

1 Umwandlg. einer n-reihigen Det. in eine (n-1)-reihige,

2 " "(n-1)- " " " " (n-2)- " ,

4 " "(n-2)- " " " " (n-3)- " ,

. . . . . ,

2^{n-2} " " 2- " " " " einreihige, d.h. in eine einfache Zahl.

Bei jeder Umformung einer r-reihigen Determinante in eine (r-1)-reihige werden aus den r^2 Elementen $(r-1)^2$ neue Elemente berechnet:

$$b_{ik} = a_{ik} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} \cdot a_{1k} = a_{ik} - \alpha_i \cdot a_{1k} \quad (i,k = 2,3,\ldots,n).$$

Der Bruch $\alpha_i = \frac{a_{i1}}{a_{11}}$ ist für alle Elemente einer Zeile der gleiche.

Für die Bestimmung der $(n-1)^2$ neuen Elemente sind also folgende Einzeloperationen notwendig:

(n-1) Divisionen: $\alpha_i = \frac{a_{i1}}{a_{11}}$,

$(n-1)^2$ Multiplikationen mit anschliessender Addition oder Subtraktion:

$$b_{ik} = a_{ik} - \alpha_i \cdot a_{1k}$$

Aus dem Hauptelement jeder Zeile (b_{ii}, c_{ii} ....) erhält man jedesmal durch Multiplikation mit einer der bereits bekannten Unterdeterminanten (z.B. a_{11} ; $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$;....) wiederum eine der gesuchten Hauptunterdeterminanten.

ormung -reihiger erminanten	Anzahl der Umformungen	a = Anzahl der Divisionen	b = Anzahl der Operationen $a_{ik} - \alpha_i \cdot a_{1K}$	c = Anzahl der nachträglichen Multiplikationen
auf (n-1)	1	(n-1)	$(n-1)^2$	(n-1)
1) " (n-2)	2	2.(n-2)	$2.(n-2)^2$	2.(n-2)
2) " (n-3)	4	4.(n-3)	$4.(n-3)^2$	4.(n-3)
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .
" 1	2^{n-2}	$2^{n-2} \cdot 1$	$2^{n-2} \cdot 1$	$2^{n-2} \cdot 1$
gesamt	$2^{n-1}-1$	$a=2^n-(n+1)$	$b=3.2^n-(n^2+2n+3)$	$c=2^n-(n+1)$

$2^n - (n+1)$ ist, wie bereits früher gezeigt, die Anzahl aller zu berechnenden Determinanten zweiter bis n-ter Ordnung. Die Gesamtzahl der dafür erforderlichen Multiplikationen und Divisionen beträgt

$$a + b + c = 5 \cdot 2^n - (n^2 + 4n + 5).$$

Diese Aufstellung gilt für den Fall, dass auch die zweireihigen Determinanten mittels einer Division und einer Multiplikation berechnet werden. Wenn man, wie in dem Zahlenbeispiel (Seite 18) die zweireihigen Determinanten ausmultipliziert (mittels zweier Multiplikationen), so ändert sich hierdurch die Gesamtzahl der notwendigen Rechenoperationen kaum, lediglich bei der Berechnung einer Determinante zweiter Ordnung

$\begin{vmatrix} a_{n-1,\,n-1} & a_{n-1,\,n} \\ a_{n,\,n-1} & a_{n,\,n} \end{vmatrix}$ fällt das nachträgliche Multiplizieren weg;

d.h. die Gesamtzahl der Multiplikationen und Divisionen sinkt auf

$$5 \cdot 2^n - (n^2 + 4n + 6).$$

Zahlentabelle über die erforderliche Rechenarbeit.

$a = c = 2^n - (n+1)$, $\quad b = 3 \cdot 2^n - (n^2 + 2n + 3)$

n =	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a=c=	1	4	11	26	57	120	247	502	1013
b=	1	6	21	58	141	318	685	1434	2949
	Gesamtzahl der erforderlichen Multiplikationen u. Divisionen:								
a+b+c-1=	2	13	42	109	254	557	1178	2437	4974

. Das Verfahren eignet sich gut für die Berechnungen drei-, vier- oder fünfreihiger Säkulardeterminanten. Der Arbeitsaufwand ist zwar für $n \geq 4$ etwas grösser als bei Benutzung des in Abschnitt 1, d beschriebenen Eliminationsverfahrens (vergl. Tabelle Seite **13**), diesem Nachteil steht jedoch hier der Vorteil einer besonders übersichtlichen Anordnung der Rechnung gegenüber.

Eine Variante dieses Verfahrens, die Mehmke vorgeschlagen hat, sei noch erwähnt. Falls die Elemente der gegebenen Determinante kleine ganze Zahlen sind, so ist es möglich und unter Umständen zweckmässig, die gesamte Rechnung mit ganzen Zahlen durchzuführen, d.h. alle diejenigen Divisionen zu vermeiden, die als Quotienten eine gebrochene Zahl ergeben. Das hat nicht nur den Vorteil, dass man durch Wegfall der Bruchrechnung übersichtlichere Zahlen und ausserdem eine absolute Genauigkeit erhält [+]), sondern man gewinnt durch die Mehmke'schen Teilbarkeitsproben eine gute ständige Kontrolle der Rechnung.

[+]) Das Zahlenbeispiel auf Seite **18** ist ein besonders günstiger Sonderfall: Da als Nenner nur die Zahlen 2, 4, 5, 10 auftreten, behält man trotz der Divisionen verhältnismässig kleine, übersichtliche Zahlen und kann daher die Rechnung auch bei Benutzung des obigen Verfahrens mit absoluter Genauigkeit durchführen.

Der Unterschied gegenüber dem oben beschriebenen Verfahren besteht darin, dass an Stelle der gebrochenen Ausdrücke

$$b_{ik} = a_{ik} - \frac{a_{il}}{a_{ll}} \cdot a_{ik}$$

jedesmal die zweireihigen Determinanten ausmultipliziert werden:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1k} \\ a_{i1} & a_{ik} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{ik} - a_{i1} \cdot a_{1k}.$$

Die Unterdeterminanten m-ter Ordnung werden aus denjenigen (m-1)-ter Ordnung berechnet, wozu jedesmal zwei Multiplikationen, sowie (ausser im Fall m = 2) eine Division durch die gemeinsame Unterdeterminante (m-2)-ter Ordnung erforderlich sind.

Die Gesamtzahl der zu berechnenden Unterdeterminanten ist gleich der oben angegebenen Zahl $b = 3 \cdot 2^n - (n^2 + 2n + 3)$; davon sind Unterdeterminanten zweiter Ordnung:

$$(n-1)^2 + (n-2)^2 + \ldots + 1^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}.$$

Die Gesamtzahl der erforderlichen Multiplikationen beträgt also:

$$2\,b = 3 \cdot 2^{n+1} - 2\,(n^2 + 2n + 3)$$

und die Gesamtzahl der erforderlichen Divisionen (Kürzungen), die gleichzeitig als Rechenproben dienen:

$$b - \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = 3 \cdot 2^n - \frac{2n^3 + 3n^2 + 13n + 18}{6}.$$

Beispiel:

10	8	-7	-8				gekürzt durch $a_{11} = 10$				gekürzt durch $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -8$	
6	**4**	-3	-6	**-8**	12	-12						
3	-3	**4**	-3	-54	**61**	-6	160	-600	**16**	-60		
3	5	-4	**-1**	26	-19	**14**	-160	200	-16	**20**	-640	**80**
							gekürzt durch 10					
					61	-6						
					-19	14	740		**74**			

					gekürzt durch a = 4
4	-3	-6			
-3	4	-3	7	-30	
5	-4	-1	-1	26	152 | 38
	4	-3			
	-4	-1		-16	

Die gesuchten Hauptunterdeterminanten sind durch Unterstreichen gekennzeichnet. In der zweiten Spalte stehen die Unterdeterminanten zweiter Ordnung, in der dritten Spalte die Unterdeterminanten dritter Ordnung, in der vierten Spalte die Hauptdeterminante (Determinante vierter Ordnung).

III. BERECHNUNG DER SÄKULARGLEICHUNG UND IHRER WURZELN AUS DEM VERLAUF DER FUNKTION D (λ).

1.) Berechnung der Säkulargleichung aus einzelnen Determinanten.

Die Säkulardeterminante ist identisch mit einer Funktion n-ten Grades von λ

$$D(\lambda) \cdot (-1)^n = \lambda^n + k_1 \lambda^{n-1} + k_2 \lambda^{n-2} + \ldots + k_{n-1} \lambda + k_n \quad (3')$$

Sie stellt also eine Parabel n-ter Ordnung dar. Diejenigen Abszissenwerte λ_i, in denen diese Parabel die Abszissenachse schneidet (oder berührt), genügen der Gleichung $D(\lambda) = 0$; sie sind also die reellen Eigenwerte.

Es besteht die Aufgabe, die Koeffizienten $k_1, k_2, \ldots, k_n$ der Gleichung (3) zu bestimmen. Das kann z.B. in folgender Weise geschehen.

Für die Unbekannte λ wählt man n beliebige Werte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$; zu jedem dieser Werte α_i wird die entsprechende Determinante $D(\alpha_i)$ berechnet. Durch n solche Wertepaare α_i, $D(\alpha_i)$ ist der Verlauf der Parabel eindeutig bestimmt. Es gelten die n Gleichungen (für i = 1, 2, ..., n):

$$\alpha_i^n + k_1 \cdot \alpha_i^{n-1} + k_2 \cdot \alpha_i^{n-2} + \ldots\ldots + k_n = D(\alpha_i) \cdot (-1)^n \qquad (8)$$

Aus diesem linearen Gleichungssystem kann man die Koeffizienten $k_1, k_2, \ldots, k_n$ berechnen.

Dieses Verfahren erfordert allerdings eine sehr umfangreiche Rechenarbeit. Allein für das Ausmultiplizieren der n Determinanten n-ter Ordnung wären je $\frac{n^3+2n-6}{3}$, zusammen also $\frac{n(n^3+2n-6)}{3}$ Multiplikationen und Divisionen erforderlich [+]; dazu käme noch die Berechnung der Potenzen $\alpha_i^2, \alpha_i^3, \ldots, \alpha_i^n$ für sämtliche α_i, und schliesslich die Auflösung des linearen Gleichungssystems (8).

[+]) Vergl. Abschnitt II , Seite 19.

Eine wesentliche Vereinfachung erreicht man, wenn man die Koeffizienten k_1, k_2 und k_n im voraus berechnet:

$$k_1 = - s_1 = - \sum_i a_{ii} \quad ,$$

$$k_2 = + s_2 = \sum_{i<k} a_{ii} \cdot a_{kk} - \sum_{i<k} a_{ik} \cdot a_{ki} \, ,$$

$$k_n = (-1)^n \, . \, s_n = (-1)^n \, . \, D(\, 0 \,) \, .$$

Dann sind zur Bestimmung der übrigen (n-3) Koeffizienten nur noch (n-3) Gleichungen nötig, wofür noch (n-3) Determinanten zu berechnen sind.

Zahlenbeispiel:

Gegeben sei die Säkulardeterminante

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 10 - \lambda & 8 & -7 & -8 \\ 6 & 4 - \lambda & -3 & -6 \\ 3 & -3 & 4 - \lambda & -3 \\ 3 & 5 & -4 & -1 - \lambda \end{vmatrix} \, .$$

Zuerst werden k_1, k_2 und k_4 berechnet:

$$k_1 = - (10 + 4 + 4 - 1) = - 17 \quad ,$$

$$k_2 = \sum a_{ii} \, a_{kk} - \sum a_{ik} \, a_{ki}$$

$$= \big(10 \, . \, 4 + (10 + 4) \, . \, 4 + (10 + 4 + 4) \, . \, (-1)\big)$$
$$- \big(6.8 + 3.(-7) + 3.(-8) + (-3).(-3) + 5.(-6) + (-4).(-3)\big)$$
$$= 78 - (-6) = 84 \, ,$$

$$k_4 = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 10 & 8 & -7 & -8 \\ 6 & 4 & -3 & -6 \\ 3 & -3 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 80 \, .$$

Unbekannt ist noch der Koeffizient k_3. Für seine Berechnung genügt eine Gleichung. Man berechnet für irgendeinen willkürlich wählbaren Wert α die zugehörige Determinante $D(\alpha)$.

Gewählt sei $\alpha = 6$, dann ist

$$(-1)^4 \cdot D(\alpha) = \begin{vmatrix} 4 & 8 & -7 & -8 \\ 6 & -2 & -3 & -6 \\ 3 & -3 & -2 & -3 \\ 3 & 5 & -4 & -7 \end{vmatrix} = -160 .$$

Gleichung (8) lautet dann

$$6^4 - 17 \cdot 6^3 + 84 \cdot 6^2 + k_3 \cdot 6 + 80 = -160 .$$

Man findet hieraus

$$k_3 = \frac{-160 - 80 - (6 \cdot (6-17) + 84) \cdot 6^2}{6} = -148 .$$

Bei diesem Rechnungsgang sind für die Auflösung eines n-reihigen Gleichungssystems folgende Multiplikationen und Divisionen erforderlich:

a) zur Berechnung des Koeffizienten k_2 :

für $\sum a_{ii}\, a_{kk}$: $(n-1)$ Multiplikationen,

für $\sum a_{ik}\, a_{ki}$: $\frac{n(n-1)}{2}$ " ,

zusammen $\frac{(n+2)(n-1)}{2}$ " .

b) zur Berechnung der Determinante D (O), sowie für $(n-3)$ weitere Determinanten n-ter Ordnung:

je $\frac{n^3+2n-6}{3}$, im ganzen also $(n-2) \cdot \frac{n^3+2n-6}{3}$ Operationen.

c) zur Aufstellung des linearen Gleichungssystems:

Zuerst müssen von jedem der $(n-3)$ Werte α_i die Potenzen $\alpha_i^2, \alpha_i^3, \ldots, \alpha_i^{n-2}$ berechnet werden. Für die Berechnung des absoluten Gliedes

$$(-1)^n D(\alpha_i) - k_n - \alpha_i^{n-2} \cdot \left((\alpha_i + k_1) \cdot \alpha_i + k_2\right)$$

sind noch je zwei weitere Multiplikationen nötig; insgesamt werden also $(n-1)(n-3)$ Multiplikationen benötigt.

d) zur Auflösung des $(n-3)$-reihigen, inhomogenen Gleichungssystems

sind insgesamt

$$\frac{(n^2-3n-1)(n-3)}{3}$$ Multiplikationen und Divisionen

erforderlich.

Die Gesamtzahl der Multiplikationen und Divisionen bei diesem Verfahren beträgt demnach:

$$\frac{(n+2)(n-1)}{2} + (n-2) \cdot \frac{n^3+2n-6}{3} + (n-1)(n-3) + \frac{(n^2-3n-1)(n-3)}{3}$$

$$= \frac{n(n-1)(2n^2+1)}{6} - (4n-7) .$$

Zahlentafel über die erforderlichen Multiplikationen u.Divisionen:

n =	3	4	5	6	7	8
Berechnung von k_2	5	9	14	20	27	35
" der Determinanten	9	44	129	296	585	1044
Aufstellung d.Gleichungen (8)	0	3	8	15	24	35
Auflösung " " (8)	0	1	6	17	36	65
Gesamtzahl d.erforderlichen Multiplikationen u. Divisionen	14	57	157	348	672	1179

Die Zahlentafel zeigt, dass der weitaus grösste Teil der Rechenarbeit auf die Berechnung der (n-2) Determinanten n-ter Ordnung entfällt, während der übrige Arbeitsaufwand im Verhältnis verschwindend gering ist.

Das Verfahren eignet sich daher vorzüglich dann, wenn einzelne Werte der Determinante D (λ) schon von vornherein bekannt sind. Falls z.B. bei einer vierreihigen Säkulardeterminante für irgend einen Wert α die zugehörige Determinante D (α) im voraus bekannt ist, so erfordert dieses Verfahren eine geringere Rechenarbeit, als irgendeins der bisher beschriebenen Verfahren.

2.) Verbesserung eines einzelnen Eigenwertes.

Man kann den Verlauf der Funktion D (λ) auch dazu benutzen, einen einzelnen Eigenwert, dessen Grösse bereits angenähert, aber nicht mit ausreichender Genauigkeit bekannt ist, genauer zu berechnen. Sind z.B. λ_1' und λ_1'' zwei Näherungswerte für den gesuchten Eigenwert λ_1, so kann man durch Berechnung der beiden Determinanten $D(\lambda_1')$ und $D(\lambda_1'')$ und durch Anwendung der Regula falsi den genaueren Wert

$$\lambda_1''' = \lambda_1' - (\lambda_1' - \lambda_1'') \cdot \frac{D(\lambda_1')}{D(\lambda_1') - D(\lambda_1'')} \qquad (9)$$

berechnen.

Um die Genauigkeit dieses verbesserten Wertes nachzuprüfen, berechnet man am besten auch noch den entsprechenden Wert der Determinante $D(\lambda_1''')$.

Es kann vorkommen, dass auch der Wert λ_1''' noch nicht hinreichend genau ist. Man muss dann noch einmal zwischen den bekannten Näherungswerten λ_1', λ_1'' und λ_1''' interpolieren. Hierzu kann wieder die Regula falsi (Sehnen- oder Sekantenverfahren) benutzt werden. Zweckmässiger ist es, eine Interpolationsformel zweiter Ordnung zu verwenden, in der alle drei bekannten Näherungswerte ausgenutzt werden.

Am besten eignet sich für diesen Zweck die Gleichung einer Parabel:

$$y = ax^2 + bx + c,$$

die durch die 3 gegebenen Punkte $x_1\ y_1$, $x_2\ y_2$ und $x_3\ y_3$ gelegt wird.

Aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c \ , \\ y_1 &= ax_1^2 + bx_1 + c \ , \\ y_2 &= ax_2^2 + bx_2 + c \ , \\ y_3 &= ax_3^2 + bx_3 + c \end{aligned} \qquad (10)$$

kann man die 3 Konstanten a, b und c eliminieren und erhält nach einfachen Umformungen die Gleichung

$$x = x_3 + \frac{(y-y_3)\cdot(x_2-x_1)}{\frac{y_1-y_3}{x_1-x_3}\cdot(x_2-x) - \frac{y_2-y_3}{x_2-x_3}\cdot(x_1-x)} \qquad +) \ (11)$$

+) Gleichung (11) lässt sich leicht aus den Gleichungen (10) ableiten. Die Zwischenrechnungen sind hier weggelassen. Eine eingehendere Behandlung dieser und ähnlicher Näherungsgleichungen muss einem besonderen Aufsatz vorbehalten bleiben.

Gesucht ist der Schnittpunkt der Parabel mit der Abszissenachse, es ist also zu setzen

$$y = 0 \quad .$$

Ferner kommt der gesuchte Abszissenwert x selber auch auf der rechten Seite der Gleichung vor. Es genügt, ihn durch einen möglichst guten Näherungswert zu ersetzen, z.B. durch den Wert x_3, falls dieser der genaueste der drei bekannten Näherungswerte ist. Die Näherungsgleichung lautet dann:

$$x_4 = x_3 - \frac{y_3 (x_2 - x_1)}{\frac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3} (x_2 - x_3) + \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} (x_3 - x_1)} \quad . \qquad (12)$$

Will man den Nulldurchgang der Parabel noch etwas genauer bestimmen, so kann man auf der rechten Seite der Gleichung (11) die Unbekannte x durch den verbesserten Näherungswert x_4 ersetzen:

$$x_4' = x_3 - \frac{y_3 (x_2 - x_1)}{\frac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3} (x_2 - x_4) + \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} (x_4 - x_1)} \quad . \qquad (12')$$

Die Näherungsformeln (12) und (12') lassen sich ohne weiteres für die vorliegende Aufgabe verwenden; die Abszissenwerte x_1, x_2, x_3 sind durch die drei bekannten Näherungswerte λ_1', λ_1'', λ_1''', und die Funktionswerte y_1, y_2, y_3 durch die entsprechenden Determinanten $D(\lambda_1')$, $D(\lambda_1'')$, $D(\lambda_1''')$ zu ersetzen.

Zahlenbeispiel:

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 10 - \lambda & 10 & 0 \\ 10 & 5 - \lambda & 2 \\ 0 & 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad .$$

Es sei z.B. für den grössten Eigenwert der Wert

$$\lambda_1' = 17{,}5$$

berechnet. Die Nachprüfung durch Einsetzen in die Determinante $D(\lambda)$ ergibt

$$D(17{,}5) = + 133{,}125 \quad .$$

Für sehr grosse Werte λ wird $D(\lambda)$ negativ. An irgendeiner Stelle $\lambda > 17{,}5$ liegt also der gesuchte Nulldurchgang der Funktion $D(\lambda)$.

Angenommen sei z.B.

$$\lambda_1'' = 19.$$

Beim Einsetzen in die Determinante erkennt man, dass dieser Wert zu hoch gegriffen ist.

$$D(19) = -432 .$$

Durch Anwendung der Regula falsi findet man den verbesserten Wert

$$\lambda_1''' = 17{,}5 - 133{,}125 \cdot \frac{19-17{,}5}{-432+133{,}125} = 17{,}5 + \frac{133{,}125 \cdot 1{,}5}{565{,}125} = 17{,}853 .$$

Die Probe ergibt

$$D(17{,}853) = 15{,}661 .$$

Mit Hilfe dieses Funktionswertes $D(\lambda_1''')$ kann man die Genauigkeit nochmals verbessern:

1.) Benutzt man die Regula falsi, so findet man z.B. aus

$\lambda' = 17{,}5$ und $\lambda''' = 17{,}853$

$$\lambda_I^{(4)} = 17{,}853 - 15{,}661 \cdot \frac{17{,}853-17{,}5}{-15{,}661+133{,}125} = \underline{17{,}900064} ,$$

oder aus $\lambda'' = 19$ und $\lambda''' = 17{,}853$:

$$\lambda_{II}^{(4)} = 17{,}853 - 15{,}661 \cdot \frac{19-17{,}853}{-432+15{,}661} = \underline{17{,}893127} .$$

2.) Benutzt man das oben beschriebene Parabelverfahren unter Verwendung der drei bekannten Näherungswerte λ', λ'' und λ''', so ergibt die Gleichung (12)

$$\lambda_{III}^{(4)} = 17{,}853 - 15{,}661 \cdot \frac{1{,}5}{\frac{-117{,}464}{0{,}353} \cdot 1{,}147 + \frac{-447{,}661}{1{,}147} \cdot 0{,}353}$$

$$= \underline{17{,}898224} .$$

Setzt man diesen Wert 17,8982 noch in Gleichung (12') ein, so erhält man

$$\lambda_{IV}^{(4)} = 17{,}853 - 15{,}661 \cdot \frac{1{,}5}{\frac{-117{,}464}{0{,}353} \cdot 1{,}1018 + \frac{-447{,}661}{1{,}147} \cdot 0{,}3982}$$

$$= \underline{17{,}89800} .$$

Der Wert $\lambda_{IV}^{(4)}$ stimmt sehr gut mit dem genauen Eigenwert überein. Dieser beträgt $\underline{\lambda = 17{,}8980564}$.

IV. NAEHERUNGSVERFAHREN ZUR GENAUEREN BESTIMMUNG EINES EIGENWERTES UND DER ZUGEHOERIGEN EIGENLOESUNG.

1.) Der erste Näherungsschritt.

Ein einfaches Näherungsverfahren kann man benutzen, wenn ein Eigenwert und die ihm entsprechende Eigenlösung bereits angenähert, jedoch nicht mit befriedigender Genauigkeit bekannt sind.

Der gesuchte Eigenwert sei λ, der hierfür ermittelte Näherungswert λ'. Die genaue Eigenlösung sei $x_1 : x_2 : \ldots : x_n$, wobei man über die absolute Grösse der Veränderlichen noch eine willkürliche Bestimmung treffen kann; es sei z.B.

$$x_n = 1 .$$

(Falls $x_n \approx 0$, so kann eine der übrigen Veränderlichen auf den Wert $x_i = 1$ festgelegt werden.)
Die errechnete, angenäherte Eigenlösung ist dann ebenfalls auf diese Normalform zurückzuführen, indem man alle x_i durch den für x_n errechneten Wert dividiert.

Die in dieser Weise festgelegte angenäherte Eigenlösung sei

$$x_1', x_2', \ldots, x_{n-1}', 1.$$

Das Gleichungssystem (1) lautet, wenn $x_n = 1$ gesetzt wird:

$$\begin{aligned}
(a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1n} &= 0 ; \\
a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \ldots + a_{2,n-1}x_{n-1} + a_{2n} &= 0 , \qquad (13)\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{n,n-1}x_{n-1} + (a_{nn}-\lambda) &= 0 .
\end{aligned}$$

Setzt man in die linke Seite dieser Gleichungen die angenäherten Werte λ', x_1', ..., x_{n-1}' ein, so wird die rechte Seite im allgemeinen nicht verschwinden, sondern man erhält gewisse Fehlergrössen $f_1, f_2, \ldots, f_n$:

$$\begin{aligned}
(a_{11}-\lambda')x_1' + a_{12}x_2' + \ldots + a_{1,n-1}x_{n-1}' + a_{1n} &= f_1 , \\
a_{21}x_1' + (a_{22}-\lambda')x_2' + \ldots + a_{2,n-1}x_{n-1}' + a_{2n} &= f_2 , \qquad (14)\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{n1}x_1' + a_{n2}x_2' + \ldots + a_{n,n-1}x_{n-1}' + (a_{nn}-\lambda') &= f_n .
\end{aligned}$$

Aus diesen Fehlergrössen f_i, (i=1,2,...,n) sollen die in den Näherungswerten x_i' und λ' enthaltenen Fehler

$$d_i = x_i' - x_i \qquad (i=1,2,\ldots,n-1) \tag{15}$$

und $\delta = \lambda' - \lambda$

berechnet werden.

Zu diesem Zweck setzt man in den Gleichungen (14) :

$$x_i' = x_i + d_i \,, \qquad \lambda' = \lambda + \delta \tag{15'}$$

ein und erhält:

$$\begin{aligned}
&(a_{11}-\lambda-\delta)(x_1+d_1) + a_{12}\cdot(x_2+d_2)+\ldots+a_{1n} = f_1 \,,\\
&a_{21}\cdot(x_1+d_1) + (a_{22}-\lambda-\delta)(x_2+d_2)+\ldots+a_{2n} = f_2 \,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{n1}\cdot(x_1+d_1) + a_{n2}\cdot(x_2+d_2)+\ldots+(a_{nn}-\lambda-\delta)=f_n \,.
\end{aligned} \tag{14'}$$

Von diesen Gleichungen werden die Gleichungen (13) subtrahiert, wobei noch folgende Umformung vorgenommen wird:

$$\begin{aligned}
&(a_{ii}-\lambda-\delta)\cdot(x_i+d_i) - (a_{ii}-\lambda)\,x_i\\
&= (a_{ii}-\lambda-\delta)\,d_i - \delta\cdot x_i = (a_{ii}-\lambda')\,d_i - \delta\cdot x_i \,.
\end{aligned} \tag{16}$$

Man erhält also für die gesuchten Fehler $d_1, d_2, \ldots, d_{n-1}$ und δ das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
&(a_{11}-\lambda')\,d_1 + a_{12}\cdot d_2 + \ldots + a_{1,n-1}\,d_{n-1} - x_1\cdot\delta = f_1 \,,\\
&a_{21}\,d_1 + (a_{22}-\lambda')\,d_2 + \ldots + a_{2,n-1}\,d_{n-1} - x_2\cdot\delta = f_2 \,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{n-1,1}\,d_1 + a_{n-1,2}\,d_2 + \ldots + (a_{n-1,n-1}-\lambda')\,d_{n-1} - x_{n-1}\cdot\delta = f_{n-1} \,,\\
&a_{n1}\,d_1 + a_{n2}\,d_2 + \ldots + a_{n,n-1}\,d_{n-1} - 1\cdot\delta = f_n \,.
\end{aligned} \tag{17}$$

Aus diesem Gleichungssystem könnte man die Grössen $d_1 \ldots d_{n-1}$ und δ genau berechnen, wenn die (als Koeffizienten darin enthaltenen) Grössen $x_1 \ldots x_{n-1}$ bekannt wären; das ist aber nicht der Fall.

Man kann jedoch näherungsweise $x_1 \ldots x_{n-1}$ durch die bekannten Näherungswerte $x_1'; \ldots x_{n-1}'$ ersetzen. Man findet dann allerdings bei Auflösung des Gleichungssystems statt der gesuchten Fehler $d_i = x_i' - x_i$ und $\delta = \lambda' - \lambda$ nur die angenäherten Werte d_i' und δ', aus denen man auch nur die verbesserten Näherungswerte

$$x_i'' = x_i' - d_i' \quad ,$$
$$\lambda'' = \lambda' - \delta'$$

errechnen kann.

Zahlenbeispiel:

Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} (10-\lambda)\, x_1 + 10\, x_2 &= 0 \quad , \\ 10\, x_1 + (5-\lambda)\, x_2 + 2\, x_3 &= 0 \quad , \\ 2\, x_2 + (1-\lambda)\, x_3 &= 0 \end{aligned}$$

besitzt einen Eigenwert von der Grössenordnung $\lambda' = -3$. In grober Annäherung sei auch die diesem Eigenwert entsprechende Eigenlösung bekannt:

$$x_1' : x_2' : x_3' = 1 : -2 : 1. \ ^{+)}$$

Es sei die Aufgabe gestellt, den Eigenwert und die Eigenlösung genauer zu berechnen.

Die Näherungswerte λ', x_1', x_2' werden in die Gleichungen (14) eingesetzt und hierdurch die Fehlergrössen f_1, f_2, f_3 bestimmt:

$$\begin{aligned} (10+3) \cdot 1 + 10 \cdot (-2) &= f_1 = -7 \quad , \\ 10 \cdot 1 + (5+3) \cdot (-2) + 2 \cdot 1 &= f_2 = -4 \quad , \\ 2 \cdot (-2) + (1+3) \cdot 1 &= f_3 = 0 \quad . \end{aligned}$$

Diese Werte werden zur Berechnung der in x_1', x_2' und λ' enthaltenen Fehler d_1, d_2 und δ in die Gleichungen (17) eingesetzt:

$$\begin{aligned} 13\, d_1 + 10\, d_2 - x_1 \cdot \delta &= -7 \quad , \\ 10\, d_1 + 8\, d_2 - x_2 \cdot \delta &= -4 \quad , \\ 2\, d_2 - \delta &= 0 \quad . \end{aligned} \qquad (17')$$

+) Die genauen Werte sind $\lambda = -3,3840094$
$x_1 : x_2 : x_3 = 1,6377788 : -2,1920047 : 1$

Die Unbekannten x_1 und x_2 werden zunächst durch die bekannten Näherungswerte $x_1' = 1$ und $x_2' = -2$ ersetzt. Man findet dann durch Auflösung des linearen Gleichungssystems die Werte

$$d_1 = -\frac{13}{19} = -0{,}684\,, \quad d_2 = \frac{9}{38} = 0{,}237\,, \quad \delta = \frac{9}{19} = 0{,}474\,,$$

und hieraus

$$x_1'' = 1{,}684 \qquad x_2'' = -2{,}237 \qquad \lambda'' = -3{,}474.$$

Die Genauigkeit der verbesserten Näherungswerte x_i'' und λ'' wird oft noch nicht ausreichen. Es muss daher noch gezeigt werden, wie man die Genauigkeit weiter verbessern kann. Hierfür kommen verschiedene Wege in Betracht.

2.) Weitere Verbesserung unter Benutzung der verbesserten Eigenlösung.

Würde man in die Gleichungen (17) für $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ die genauen Werte der gesuchten Eigenlösung einsetzen, so könnte man, wie bereits gezeigt wurde, durch Auflösung dieses Gleichungssystems die in den Näherungswerten $x_1', x_2', \ldots x_{n-1}'$ und λ' enthaltenen Fehler

$$d_i = x_i' - x_i \quad \text{und}$$
$$\delta = \lambda' - \lambda$$

genau berechnen.
Setzt man statt der genauen Eigenlösung Näherungswerte in die Gleichungen (17) ein, so wird man die in x_i' und λ' enthaltenen Fehler umso genauer errechnen, je genauer die benutzten Näherungswerte für $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ sind.

Man kann daher die Genauigkeit weiter verbessern, indem man die bereits verbesserten Näherungswerte x_i'' in die Gleichungen (17) einsetzt. Durch Auflösung dieses Gleichungssystems findet man für die in x_i' und λ' enthaltenen Fehler jetzt die genaueren Werte d_i'' und δ'' und hieraus die von neuem verbesserten Näherungswerte

$$x_i''' = x_i' - d_i''$$

$$\lambda''' = \lambda' - \delta''$$

Man kann diese Rechnung, falls es notwendig ist, noch beliebig oft wiederholen und mit Hilfe der genauer berechneten Fehler $d_i^{(\nu)}$ und $\delta^{(\nu)}$ den gesuchten Eigenwert und die entsprechende Eigenlösung

mit jeder gewünschten Genauigkeit ermitteln:

$$x_i^{(\nu+1)} = x_i' - d_i^{(\nu)} ,$$
$$\lambda^{(\nu+1)} = \lambda' - \delta^{(\nu)} . \qquad (18)$$

Auf die Frage nach der Konvergenz dieses Verfahrens wird an anderer Stelle noch eingegangen (vergl. Abschnitt VII Seite 119).

Beispiel:

Im obigen Zahlenbeispiel werden in Gleichung (17') die Unbekannten x_1 und x_2 durch die verbesserten Näherungswerte $x_1'' = 1{,}684$ und $x_2'' = -2{,}237$ ersetzt:

Die Auflösung des Gleichungssystems

$$13\, d_1'' + 10\, d_2'' - 1{,}684\, \delta'' = -7 ,$$
$$10\, d_1'' + 8\, d_2'' + 2{,}237\, \delta'' = -4 ,$$
$$2\, d_2'' - \delta'' = 0$$

ergibt die genaueren Werte für d_1, d_2 und δ :

$$d_1'' = -0{,}6343 , \quad d_2'' = +0{,}1878 , \quad \delta'' = +0{,}3756 ,$$

die von den anfänglichen Näherungswerten x_1', x_2' und λ' zu subtrahieren sind.

Man erhält:

$$x_1''' = 1{,}6343 \qquad x_2''' = -2{,}1878 \qquad \lambda''' = -3{,}3756$$

Die folgende Tabelle zeigt, wie man durch wiederholtes Einsetzen der errechneten, verbesserten Werte in die Gleichungen (17') rasch und bequem zu sehr genauen Werten gelangt.

Näherungswerte für	x_1	x_2	λ
x_1' , λ'	1	-2	-3
x_i'' , λ''	1,684	-2,237	-3,474
x_i''' , λ'''	1,6343	-2,1878	-3,3756
$x_i^{(4)}$, $\lambda^{(4)}$	1,63807	-2,19237	-3,38474
$x_i^{(5)}$, $\lambda^{(5)}$	1,63775	-2,19197	-3,38395
(zum Vergleich): genaue Werte	1,637779	-2,192005	-3,384009

Dabei ist zu berücksichtigen, dass die gewählten Anfangswerte x_i' und λ' in diesem Beispiel sehr ungenau sind. Falls von vornherein bessere Näherungswerte x_i' und λ' bekannt sind, die für die Berechnung der Fehlergrössen $f_1, f_2, \ldots f_n$ benutzt werden können, so werden diese Fehlergrössen wesentlich kleiner sein und das Verfahren wird daher bedeutend schneller konvergieren.

3.) Benutzung des verbesserten Eigenwertes.

Für manche Fälle ist es vorteilhaft, das Verfahren in folgender Weise abzuändern.

Bei der Differenzbildung aus den Gleichungen (14') und (13) ist anstelle der Umformung (16) auch die folgende Umformung möglich

$$(a_{ii} - \lambda - \delta)(x_i + d_i) - (a_{ii} - \lambda)\, x_i \qquad (19)$$

$$= (a_{ii} - \lambda)\, d_i - \delta \cdot (x_i + d_i) = (a_{ii} - \lambda)\, d_i - x_i' \,.$$

Anstelle der Gleichungen (17) erhält man dann das folgende Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
&(a_{11} - \lambda)\, d_1 + \ldots + a_{1,n-1} \cdot d_{n-1} - x_1' \cdot \delta = f_1 \,, \\
&\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
&a_{n-1,1} \cdot d_1 + \ldots + (a_{n-1,n-1} - \lambda) \cdot d_{n-1} - x_{n-1}' \cdot \delta = f_{n-1} \,, \\
&a_{n1} \cdot d_1 + \ldots + a_{n,n-1} \cdot d_{n-1} - \delta = f_n \,.
\end{aligned} \qquad (20)$$

Darin sind, ebenso wie zuvor,

$f_1, f_2, \ldots f_n$ die Fehlergrössen, die man beim Einsetzen der von vornherein bekannten Näherungswerte x_i' $(i=1,2,\ldots n-1)$ und λ' in die Ausdrücke (14) findet und

d_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ und δ die in diesen anfänglichen Näherungswerten x_i' und λ' noch enthaltenen Fehler.

Ersetzt man in diesen Gleichungen (20) noch den unbekannten Eigenwert λ durch den bekannten Näherungswert λ', so stimmen die Gleichungen genau überein mit denjenigen, die oben zur Berechnung der ersten, angenäherten Werte

$$d_i' \ (i = 1, 2, \ldots, n-1) \text{ und } \delta'$$

und der verbesserten Näherungswerte x_i'' und λ'' benutzt wurden.

Die weitere Rechnung, die zur genaueren Berechnung der Fehler d_i und δ benutzt wird, unterscheidet sich jedoch von dem bisherigen Verfahren dadurch, dass für den Eigenwert λ die verbesserten Werte in die Gleichungen eingesetzt werden, während für die Eigenlösung die anfänglichen Näherungswerte weiter benutzt werden.

Auch die Gleichungen (20) gelten exakt, wenn für λ der genaue Eigenwert eingesetzt wird. Sie ermöglichen eine umso genauere Berechnung der in x_i' und λ' enthaltenen Fehler, je genauer der für λ eingesetzte Näherungswert ist.

Beispiel:

Im obigen Zahlenbeispiel (Seite 33 f.) wurde für λ der verbesserte Näherungswert

$$\lambda'' = -3{,}474$$

errechnet. Dieser Wert wird nun wieder für λ in die Gleichungen (20) eingesetzt:

$$\begin{aligned} 13{,}474\, d_1'' + 10\, d_2'' - \delta'' &= -7 \,, \\ 10\, d_1'' + 8{,}474\, d_2'' + 2\delta'' &= -4 \,, \\ 2\, d_2'' - \delta'' &= 0 \,. \end{aligned}$$

Man findet hieraus

$$\begin{aligned} d_1'' &= -0{,}6281 \,, & x_1''' &= x_1' - d_1'' = 1{,}6281 \,, \\ d_2'' &= +0{,}1828 \,, & x_2''' &= x_2' - d_2'' = -2{,}1828 \,, \\ \delta'' &= +0{,}3657 \,, & \lambda''' &= \lambda' - \delta'' = -3{,}3657 \,. \end{aligned}$$

Den Wert λ''' kann man von neuem in die Gleichungen (20) einsetzen und hierdurch die Werte x_i und λ noch genauer berechnen. Durch wiederholte Anwendung dieser Näherungsrechnung gelangt man zu folgenden Werten:

Näherungswerte für	x_1	x_2	λ
x_i' , λ'	1	-2	-3
x_i'' , λ''	1,684	-2,237	-3,474
x_i''' , λ'''	1,6281	-2,1828	-3,3657
$x_i^{(4)}$, $\lambda^{(4)}$	1,6398	-2,1939	-3,38785
$x_i^{(5)}$, $\lambda^{(5)}$	1,63736	-2,19160	-3,38321
$x_i^{(6)}$, $\lambda^{(6)}$	1,63787	-2,19209	-3,38418

Die besonderen Anwendungsgebiete und Vorteile dieser verschiedenen Näherungsverfahren werden später noch erörtert (vergl. Abschnitt X Seite 174).

Konvergenzbetrachtungen.

Auf die Frage nach der Konvergenz dieses Verfahrens soll hier noch kurz eingegangen werden.

K onvergenzuntersuchungen bei Näherungsverfahren verfolgen hauptsächlich einen zweifachen Zweck:

1.) Es ist festzustellen, unter welchen Voraussetzungen die nacheinander berechneten Näherungswerte, im vorliegenden Fall also die Werte

$$\lambda' , \lambda'' , \lambda''' , \ldots\ldots , \lambda^{(\nu)} , \ldots$$

gegen einen bestimmten Festwert konvergieren, unter welchen Bedingungen also die Differenzen je zweier aufeinander folgenden Näherungswerte

$$(\lambda''-\lambda') , (\lambda'''-\lambda'') , \ldots\ldots , (\lambda^{(\nu+1)}-\lambda^{(\nu)}) , \ldots\ldots$$

sich mit genügender Konvergenz dem Wert Null nähern.

2.) Es muss untersucht werden, ob ein solcher Grenzwert, für den die Grenzbedingung

$$\lambda^{(\nu+1)} = \lambda^{(\nu)}$$

erfüllt ist, auch wirklich eine Wurzel der gegebenen Gleichung, im vorliegenden Fall also ein Eigenwert des gegebenen Gleichungssystems ist.

Die Behandlung der ersten Frage soll auf eine spätere Stelle dieser Abhandlung verschoben werden, da die Benutzung der vektoriellen Darstellungsart hierfür besondere Vorteile bietet (vergl. Abschnitt VII Seite 120). Hier soll zunächst nur die zweite Frage geklärt werden.

Wenn man in dem Gleichungssystem (20) für λ den Näherungswert $\lambda^{(\nu)}$ einsetzt, so findet man durch Auflösung des Gleichungssystems für δ den Näherungswert:

$$\delta^{(\nu)} = -\frac{\begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda^{(\nu)}) & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & f_1 \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda^{(\nu)}) & \dots & a_{2,n-1} & f_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & f_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda^{(\nu)}) & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & x_1' \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda^{(\nu)}) & \dots & a_{2,n-1} & x_2' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & 1 \end{vmatrix}} \quad (21)$$

Der Ausdruck (21) kann in folgender Weise umgeformt werden:
In der Zählerdeterminante wird von der letzten Spalte

das x_1'-fache der ersten Spalte,

das x_2'-fache der zweiten Spalte,

. . . . . .

das x_{n-1}'-fache der $(n-1)$-ten Spalte

subtrahiert; dabei bleibt der Wert der Determinante unverändert.
Die Elemente der letzten Spalte sind dann

$$f_1 - \left((a_{11} - \lambda^{(\nu)}) x_1' + a_{12} x_2' + \dots + a_{1,n-1} x_{n-1}'\right),$$
$$f_2 - \left(a_{21} x_1' + (a_{22} - \lambda^{(\nu)}) x_2' + \dots + a_{2,n-1} x_{n-1}'\right),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f_n - \left(a_{n1} x_1' + a_{n2} x_2' + \dots + a_{n,n-1} x_{n-1}'\right).$$

Ersetzt man noch $f_1, f_2, \dots f_n$ durch die Ausdrücke (14), so erhält man als Elemente der letzten Spalte der Zählerdeterminante:

$$a_{1n} - (\lambda' - \lambda^{(\nu)}) x_1',$$
$$a_{2n} - (\lambda' - \lambda^{(\nu)}) x_2',$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$(a_{nn} - \lambda^{(\nu)}) - (\lambda' - \lambda^{(\nu)}) \cdot 1.$$

Die Zählerdeterminante kann dann in einer Summe von zwei Determinanten zerlegt werden:

$$\delta^{(\nu)} = -\frac{D(\lambda^{(\nu)}) - (\lambda' - \lambda^{(\nu)}) \cdot G(\lambda^{(\nu)})}{G(\lambda^{(\nu)})}. \quad (22)$$

worin zur Abkürzung gesetzt ist

$$\begin{vmatrix} (a_{11}-\lambda^{(\nu)}) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22}-\lambda^{(\nu)}) & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & & (a_{nn}-\lambda^{(\nu)}) \end{vmatrix}, \quad G(\lambda^{(\nu)}) = \begin{vmatrix} (a_{11}-\lambda^{(\nu)}) & a_{21} & \dots & x_1' \\ a_{21} & (a_{22}-\lambda^{(\nu)}) & \dots & x_2' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Der aus $\lambda^{(\nu)}$ errechnete, verbesserte Eigenwert ist also

$$\lambda^{(\nu+1)} = \lambda' - \delta^{(\nu)} = \lambda' + \frac{D(\lambda^{(\nu)})}{G(\lambda^{(\nu)})} - (\lambda' - \lambda^{(\nu)})$$

$$= \lambda^{(\nu)} + \frac{D(\lambda^{(\nu)})}{G(\lambda^{(\nu)})} \qquad (23)$$

Hieraus folgt zunächst

$$D(\lambda^{(\nu)}) = G(\lambda^{(\nu)}) \cdot (\lambda^{(\nu+1)} - \lambda^{(\nu)}) . \qquad (23')$$

Damit ist gezeigt, dass alle Werte λ , für die die Grenzbedingung

$$\lambda^{(\nu+1)} = \lambda^{(\nu)}$$

erfüllt ist, auch die Gleichung $D(\lambda) = 0$ befriedigen, also Wurzeln der Säkulargleichung und somit Eigenwerte des gegebenen Gleichungssystems (1) sind.

4.) Abgekürzte Verfahren.

Aus der Gleichung (23) kann noch eine weitere, wichtige Folgerung gezogen werden. Die Differenz zweier aufeinander folgender, nach Gleichung (20) berechneter Näherungswerte

$\lambda^{(\nu+1)} - \lambda^{(\nu)}$ ist eine algebraische Funktion von $\lambda^{(\nu)}$:

$$\lambda^{(\nu+1)} - \lambda^{(\nu)} = \frac{D(\lambda^{(\nu)})}{G(\lambda^{(\nu)})} = g(\lambda^{(\nu)}) . \qquad (24)$$

Für $\lambda^{(\nu)} = \lambda$ ist dieser Ausdruck = 0.

Falls nun <u>drei</u> aufeinander folgende Näherungswerte bekannt sind, z.B.

$$\lambda', \quad \lambda'', \quad \lambda''',$$

so sind damit auch zwei Werte der Funktion (24) gegeben, nämlich

$$\lambda'' - \lambda' = g(\lambda') \text{ und}$$
$$\lambda''' - \lambda'' = g(\lambda'').$$

Von gewissen Sonderfällen abgesehen, kann man im allgemeinen an-

nehmen, dass die Funktion $g(\lambda')$ in der nächsten Umgebung des Eigenwertes λ stetig verläuft und näherungsweise durch eine lineare Funktion ersetzt werden kann.

(Ausnahmen liegen vor:
a) wenn der Nennerausdruck $G(\lambda^{(\nu)})$ zufällig genau für den Wert λ oder in dessen unmittelbarer Nähe den Wert Null annimmt,
b) wenn λ ein mehrfacher Eigenwert ist oder in dem betrachteten Bereich mehrere Eigenwerte liegen.)

Bekannt sind also die Werte $g(\lambda')$ und $g(\lambda'')$. Gesucht ist derjenige Wert λ, für den $g(\lambda) = 0$. Durch Anwendung der Regula falsi findet man

$$\lambda \approx \lambda' - g(\lambda') \cdot \frac{\lambda'' - \lambda'}{g(\lambda'') - g(\lambda')}$$

$$= \lambda' - \frac{(\lambda'' - \lambda') \cdot (\lambda'' - \lambda')}{(\lambda''' - \lambda'') - (\lambda'' - \lambda')} = \lambda' - \frac{(\lambda'' - \lambda')^2}{\lambda''' - 2 \cdot \lambda'' + \lambda'}$$

$$= \frac{\lambda' \cdot \lambda''' - \lambda''^2}{\lambda''' - 2\lambda'' + \lambda'} = \lambda''' - \frac{(\lambda''' - \lambda'')^2}{\lambda''' - 2\lambda'' + \lambda'} \quad . \qquad (25)$$

Im obigen Beispiel findet man nach dieser Formel aus den drei Näherungswerten

$$\lambda' = -3, \qquad \lambda'' = -3{,}474, \qquad \lambda''' = -3{,}3657$$

den verbesserten Wert

$$-3{,}3657 + \frac{0{,}1083}{-0{,}5823} = -3{,}38584,$$

oder aus den drei Näherungswerten

$$\lambda'' = -3{,}474, \qquad \lambda''' = -3{,}3657 \qquad \lambda^{(4)} = -3{,}38785$$

den bereits recht genauen Wert

$$-3{,}38785 + \frac{0{,}02215}{0{,}13045} = -3{,}384089.$$

In der Formel (25) ist vorausgesetzt, dass unter Benutzung einer bestimmten angenäherten Eigenlösung der Wert λ'' aus λ' und ebenso der Wert λ''' aus λ'' nach Gleichung (20) berechnet wurde.

Die Regula falsi lässt sich aber auch in dem allgemeineren Fall anwenden, wenn für 2 beliebige Näherungswerte λ_1' und λ_2', die beide in der Nähe der gesuchten Wurzel liegen, nach Gleichung (20) die verbesserten Näherungswerte λ_1'' und λ_2'' berechnet sind, vorausgesetzt, dass auch hier eine bestimmte angenäherte Eigenlösung benutzt wurde.

Auf dem gleichen Weg wie oben gelangt man dann bei Anwendung der Regula falsi zu der Näherungsformel

$$\lambda \approx \lambda_2'' - \frac{(\lambda_2'' - \lambda_1'') \cdot (\lambda_2'' - \lambda_2')}{(\lambda_2'' - \lambda_2') - (\lambda_1'' - \lambda_1')} \qquad (25')$$

Für den Fall $\lambda_2' = \lambda_1''$ geht diese Formel in die Gleichung (25) über.

Interpolationsformeln zweiter Ordnung.

Wenn man durch wiederholte Anwendung der Gleichungen (20) zu dem anfänglichen Näherungswert λ' der Reihe nach 3 weitere Näherungswerte λ'', λ''', $\lambda^{(4)}$ (oder allgemein zu 3 beliebigen Näherungswerten λ_1', λ_2', λ_3', die in der Nähe des gesuchten Eigenwertes liegen, die 3 verbesserten Näherungswerte λ_1'', λ_2'', λ_3'') berechnet hat, so kann man auch nach einem Interpolationsverfahren zweiter Ordnung zwischen diesen 3 verbesserten Werten interpolieren.

Hierfür eignet sich meistens wohl am besten die Hyperbelgleichung:

$$x = x_3 - y_3 \frac{y_2 - y_1}{y_2 \cdot \frac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3} - y_1 \cdot \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}} \qquad (26)$$

Setzt man hierin:

$$x_1 = \lambda', \quad x_2 = \lambda'', \quad x_3 = \lambda'''$$
$$y_1 = \lambda'' - \lambda', \quad y_2 = \lambda''' - \lambda'', \quad y_3 = \lambda^{(4)} - \lambda'''$$

(bzw.:

$$x_1 = \lambda_1', \quad x_2 = \lambda_2', \quad x_3 = \lambda_3'$$
$$y_1 = \lambda_1'' - \lambda_1', \quad y_2 = \lambda_2'' - \lambda_2', \quad y_3 = \lambda_3'' - \lambda_3'),$$

so erreicht man meistens viel genauere Werte als bei linearer Interpolation.

Zahlenbeispiel:

Aus den errechneten Werten

$\lambda' = -3$, $\lambda'' = -3{,}474$, $\lambda''' = -3{,}3657$, $\lambda^{(4)} = -3{,}38785$

findet man bei Anwendung der Näherungsformel (26):

$$\lambda \approx -3{,}38400125.$$

Dieser Wert ist noch um eine Zehnerstelle genauer als der mit Hilfe der Regula falsi aus λ'', λ''' und $\lambda^{(4)}$ berechnete Wert.

5.) Benutzung der verbesserten Eigenlösung u n d des verbesserten Eigenwertes.

Ein anderer Weg zur weiteren Verbesserung der errechneten Näherungswerte besteht darin, dass man das gesamte unter 1) geschilderte Verfahren noch ein- oder mehrmals wiederholt.

Die aus x_i' und λ' errechneten, verbesserten Näherungswerte

$$x_i'' \text{ und } \lambda''$$

werden wieder in die Gleichungen (14) eingesetzt und hieraus die Fehlergrössen

$$\begin{aligned}
(a_{11} - \lambda'')\, x_1'' + a_{12}\, x_2'' + \ldots + a_{1n}\, x_n'' &= f_1'' \\
a_{21} \cdot x_1'' + (a_{22} - \lambda'')\, x_2'' + \ldots + a_{2n} \cdot x_n'' &= f_2'' \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \qquad (14'') \\
a_{n1} \cdot x_1'' + a_{n2}\, x_2'' + \ldots + (a_{nn} - \lambda'')\, x_n'' &= f_n''
\end{aligned}$$

neu berechnet.

Der Rechnungsgang zur Ermittlung der in x_i'' und λ'' noch enthaltenen Fehler ist dann genau der gleiche wie früher bei der Berechnung der in x_i' und λ' enthaltenen Fehler.

Zahlenbeispiel:

Die aus x_1', x_2' und λ' errechneten, verbesserten Näherungswerte

$$x_1'' = 1{,}68 \qquad x_2'' = -2{,}24 \qquad \lambda'' = -3{,}47$$

werden in die Gleichungen (14") eingesetzt:

$$\begin{aligned}
13{,}47 \cdot 1{,}68 - 10 \cdot 2{,}24 + 0 &= f_1'' = 0{,}2296 \\
10 \cdot 1{,}68 - 8{,}47 \cdot 2{,}24 + 2 \cdot 1 &= f_2'' = -0{,}1728 \\
0 - 2 \cdot 2{,}24 + 4{,}47 \cdot 1 &= f_3'' = -0{,}0100
\end{aligned}$$

Aus dem Gleichungssystem entsprechend den Gleichungen (17)

$$\begin{aligned}
13{,}47\, d_1'' + 10\, d_2'' - 168\, \delta'' &= 0{,}2296 \\
10\, d_1'' + 8{,}47\, d_2'' - 2{,}24\, \delta'' &= -0{,}1728 \\
2\, d_2'' - \delta'' &= -0{,}0100
\end{aligned}$$

findet man näherungsweise die in λ'' und x_i'' noch enthaltenen Fehler δ'' und d_i'' und hieraus die abermals verbesserten Näherungswerte

$$\lambda''' = \lambda'' - \delta''$$

$$x_i''' = x_i'' - d_i'' \quad :$$

$d_1'' = + 0{,}0415$ $\qquad x_1''' = 1{,}6385$

$d_2'' = - 0{,}0471$ $\qquad x_2''' = - 2{,}1929$

$\delta'' = - 0{,}0843$ $\qquad \lambda''' = - 3{,}3857$

Bei nochmaliger Durchführung dieser Rechnung findet man unter Benutzung der berechneten Werte x_i''' und λ''':

$$f_1''' = 0{,}00213088$$

$$f_2''' = - 0{,}00500153$$

$$f_3''' = - 0{,}00010000$$

Aus dem Gleichungssystem

$$13{,}3857\, d_1''' + 10\, d_2''' - 1{,}6385\, \delta''' = 0{,}00213088$$

$$10\, d_1''' + 8{,}3857\, d_2''' + 2{,}1929\, \delta''' = - 0{,}00500153$$

$$2\, d_2''' - \delta''' = - 0{,}00010000$$

folgt

$d_1''' = 0{,}00062095$ $\qquad x_1^{(4)} = x_1''' - d_1''' = 1{,}63777905$

$d_2''' = - 0{,}00089499$ $\qquad x_2^{(4)} = x_2''' - d_2''' = - 2{,}19200501$

$\delta''' = - 0{,}00168998$ $\qquad \lambda^{(4)} = \lambda''' - \delta''' = - 3{,}38401002$

Diese Näherungswerte $x_1^{(4)}$, $x_2^{(4)}$ und $\lambda^{(4)}$ stimmen bereits über 7 Dezimalen mit den genauen Werten

$$x_1 = 1{,}6377788$$

$$x_2 = - 2{,}1920047$$

$$\lambda = - 3{,}3840094$$

überein.

Das Beispiel zeigt, dass dieses Verfahren viel rascher konvergiert als die beiden unter 2) und 3) beschriebenen Verfahren, bei denen nur entweder die verbesserte Eigenlösung oder der verbesserte Eigenwert für die weitere Verbesserung der Näherungswerte ausgenutzt wird.

Die erneute Berechnung der Fehlergrössen $f_1 \ldots f_n$ ist auch deswegen vorteilhaft, weil sie eine gute Kontrolle der Rechnungen ermöglicht und einen Anhaltspunkt dafür gibt, ob das Verfahren konvergiert: Falls z.B. die aus x_i'' und λ'' errechneten Grössen f_i'' nicht wesentlich kleiner sind, als die aus x_i' und λ' errechneten Werte f_i, so ist das Näherungsverfahren im allgemeinen

unbrauchbar, da es dann garnicht oder erst nach einer grossen Zahl von Näherungsschritten zum Ziel führt.

Andererseits bieten aber auch die unter 2) und 3) geschilderten Verfahren besondere Vorteile, die im letzten Abschnitt dieser Arbeit noch im einzelnen betrachtet werden sollen.

6.) Der erforderliche Arbeitsaufwand.

Auch für die in diesem Abschnitt behandelten Näherungsverfahren soll als Anhaltspunkt für die Beurteilung der erforderlichen Rechenarbeit die Anzahl der für jeden Näherungsschritt benötigten Multiplikationen und Divisionen angegeben werden.

Der erste Näherungsschritt (Berechnung der ersten verbesserten Näherungswerte λ'' und x_i'') erfordert folgende Rechnungen:

1.) Division der gegebenen Eigenlösung durch x_n:

$(n-1)$ Divisionen.

2.) Berechnung der n Fehlergrössen $f_1, \ldots, f_n$: je $(n-1)$ Multiplikationen, zusammen also

$n(n-1)$ Multiplikationen.

3.) Auflösung des n-reihigen linearen Gleichungssystems für $d_1', d_2', \ldots d_{n-1}', \delta'$: $\frac{n(n+1)}{2}$ Divisionen und

$\frac{n(n-1)(2n+5)}{6}$ Multiplikationen,

wovon noch $(n-1)$ Multiplikationen eingespart werden können, da ein Koeffizient von δ' gleich 1 ist.

Die Gesamtzahl der erforderlichen Multiplikationen und Divisionen beträgt also

$\frac{n^2+3n-2}{2}$ Divisionen und $\frac{(n-1)(2n^2+11n-6)}{6}$ Multiplikationen,

zusammen also $\frac{n(n^2+6n-4)}{3}$ Operationen.

Wenn für die weitere Verbesserung gemäss dem unter 2) beschriebenen Verfahren die verbesserte Eigenlösung benutzt werden soll, so empfiehlt es sich, bei der Auflösung des linearen Gleichungssystems zuerst die Unbekannten d_1', d_2', ... , d_{n-1}' zu eliminieren und den Wert δ' zuerst zu berechnen, obwohl gerade dieser für die weitere Rechnung nicht gebraucht wird. Wenn man nämlich die Rechnung in dieser Weise anordnet, so sind bei jedem folgenden Näherungsschritt nur immer die Koeffizienten von δ neu zu berechnen, dagegen bleiben alle übrigen Koeffizienten unberührt, wenn anstelle der Werte x_i' die verbesserten Werte x_i'', x_i''' usw. eingesetzt werden.

Jeder weitere Näherungsschritt erfordert dann nur

n Divisionen und $(n-1)^2$ Multiplikationen,

also insgesamt

$$(n^2 - n + 1) \text{ Operationen.}$$

Bei Verwendung des verbesserten Eigenwertes gemäß 3) braucht bei jedem Näherungsschritt nur der Wert δ' bzw. δ'', δ''' usw. berechnet zu werden. Berücksichtigt man auch hier, dass ein Koeffizient von $\delta^{(\nu)}$ stets gleich 1 ist, so sind zur Errechnung dieses Wertes aus dem linearen Gleichungssystem (20)

bei geradem n $\frac{n^2}{4}$ Divisionen und $\frac{n\cdot(n^2+2)}{6}$ Multiplikationen,

bei ungeradem n $\frac{n^2-1}{4}$ Divisionen und $\frac{n^3+2n-3}{6}$ Multiplikationen

erforderlich.

Bei mehrmaliger Wiederholung des unter 1) beschriebenen Verfahrens gemäß 5) fällt lediglich vom 2. Näherungsschritt ab das anfängliche Dividieren durch x_n fort.

Für jeden weiteren Näherungsschritt sind daher

$\frac{n(n+1)}{2}$ Divisionen und $\frac{(n-1)\,(2n^2+11n-6)}{6}$ Multiplikationen,

also insgesamt

$\frac{n^3 + 6n^2 - 7n + 3}{3}$ Operationen erforderlich.

Zahlentafel über die Anzahl der erforderlichen Multiplikationen und Divisionen bei den einzelnen Näherungsverfahren.

---

	n =	3	4	5	6	7	8
...ter ...erungs-...ritt	Berechnung von $f_1 \dots f_n$	8	15	24	35	48	63
	Auflösung des linearen Gleichungssystems	15	33	61	101	155	225
	zusammen	23	48	85	136	203	288
...itere ...besse-...g	Verfahren 2)	7	13	21	31	43	57
	" 3)	**7**	**16**	**28**	**47**	**71**	**104**
	" 5)	21	45	81	131	197	281

Bei einem Vergleich mit anderen Verfahren ist zu berücksichtigen, dass die Berechnung der Grössen f_1, f_2, ... f_n als Probe zu werten ist, und ferner, dass die übrigen Rechnungen lediglich zur Berechnung der Korrekturglieder d_i und δ dient, wobei im allgemeinen nur wenige Dezimalstellen berücksichtigt zu werden brauchen. Hierdurch ist es z.B. möglich, auch bei Benutzung des Rechenschiebers recht genaue Ergebnisse zu errechnen.

V. Berechnung der Eigenwerte und Eigenlösungen mit Hilfe der Hamilton - Cayley'schen Gleichung.

Das Verfahren, das in diesem Abschnitt behandelt werden soll, bietet gegenüber den bisher beschriebenen Verfahren in vielen Fällen sehr grosse Vorteile. Die erforderliche Rechenarbeit ist meistens verhältnismässig gering. Ein besonderer Vorteil besteht ferner darin, dass man nicht nur die Eigenwerte, sondern auch die dazugehörigen Eigenlösungen in einfacher und bequemer Weise berechnen kann.

Die wichtigsten Grundbegriffe der Vektoren- und Matrizenrechnung, die für die Darstellung dieses Verfahrens gebraucht werden, sind im folgenden zusammengestellt.

1. Allgemeine Grundlagen.

Vektoren.

Die Unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ werden als die Komponenten eines Vektors n-ter Ordnung betrachtet. Bei allen Beziehungen zwischen mehreren Vektoren wird im folgenden stets vorausgesetzt, dass es sich um Vektoren von gleicher (und zwar n-ter) Ordnung handelt.

Schreibweise für Vektoren (kleine deutsche Buchstaben):

$$\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} .$$

Skalares Produkt (oder kurz: " Produkt ") zweier Vektoren:

$$\mathfrak{x}\mathfrak{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n .$$

Zwei Vektoren heissen einander proportional (oder auch "parallel"), wenn die entsprechenden Komponenten einander proportional sind

$$x_1 : x_2 : \ldots : x_n = y_1 : y_2 : \ldots : y_n .$$

Zwei Vektoren heissen zueinander senkrecht, wenn ihr skalares Produkt verschwindet:

$$\mathfrak{x}\mathfrak{y} = 0 .$$

Ein Vektor, dessen eine Komponente = 1 ist und dessen sämtliche übrigen Komponenten verschwinden, heisst "Einheitsvektor". Als i-ter Einheitsvektor ($\mathfrak{e}_i$) wird derjenige Einheitsvektor bezeichnet,

dessen i-te Komponente = 1 und dessen übrige Komponenten sämtlich = 0 sind:

$$\mathfrak{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{v}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Matrizen.

Die n^2 Koeffizienten a_{ik} $(i,k = 1, 2, \ldots n)$ eines n-reihigen linearen Gleichungssystems mit n Unbekannten werden als die Elemente einer Matrix betrachtet:

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Bei allen Betrachtungen über Matrizen wird im folgenden, soweit nichts anderes angegeben ist, stets vorausgesetzt, dass es sich um quadratische Matrizen n-ter Ordnung handelt. - Bei den Doppelindizes ik wird stets durch den ersten die betreffende Z e i l e der Matrix, durch den zweiten die S p a l t e gekennzeichnet, in der das Element steht.

Multipliziert man einen Vektor $\mathfrak{x}$ mit einer Matrix $\mathfrak{A}$, so erhält man einen neuen ("transformierten") Vektor:

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{x} = \mathfrak{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \quad *) \tag{28}$$

Die Multiplikation wird ausgeführt, indem man den Vektor $\mathfrak{x}$ mit den einzelnen Zeilen der Matrix $\mathfrak{A}$ skalar multipliziert; das Produkt des Vektors $\mathfrak{x}$ mit der i-ten Zeile der Matrix ergibt die i-te Komponente des Vektors $\mathfrak{z}$:

$$z_i = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{in} x_n, \tag{28'}$$

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} = \begin{pmatrix} \sum a_{1k} \cdot x_k \\ \sum a_{2k} \cdot x_k \\ \ldots\ldots \\ \sum a_{nk} \cdot x_k \end{pmatrix}.$$

(Die Summen über $k = 1, 2, \ldots, n$ genommen).

*) Der Multiplikator, in diesem Fall die transformierende Matrix $\mathfrak{A}$, wird hier sowie auch im folgenden stets v o r die zu multiplizierende Grösse gesetzt.

Das Produkt aus zwei Matrizen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ ergibt eine neue Matrix

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = \mathcal{C} .$$

Die Multiplikation wird ausgeführt, indem man jede Spalte der hinteren Matrix ($\mathcal{B}$) wie einen Vektor mit der vorderen Matrix ($\mathcal{A}$) multipliziert. Das skalare Produkt aus der i-ten Zeile von $\mathcal{A}$ und der k-ten Spalte von $\mathcal{B}$ liefert dasjenige Element c_{ik} der Matrix $\mathcal{C} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$, in dem sich die i-te Zeile mit der k-ten Spalte kreuzt:

$$c_{ik} = \sum_{r = 1, 2, \ldots n} a_{ir} \cdot b_{rk} \quad . \tag{29}$$

Einheitsmatrix:

Die Matrix

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} ,$$

deren sämtliche Diagonalelemente $a_{ii} = 1$ und deren sämtliche übrigen Elemente $a_{ik} = 0$ $(i \neq k)$ sind, heisst Einheitsmatrix.

Jeder Vektor und jede Matrix bleibt bei Multiplikation mit der Einheitsmatrix unverändert:

$$\mathcal{E} \cdot \mathcal{E} = \mathcal{E} ,$$
$$\mathcal{E} \cdot \mathcal{A} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{E} = \mathcal{A} . \tag{30}$$

Potenzen und Polynome einer Matrix.

Eine Matrix wird ins Quadrat oder eine höhere Potenz erhoben, indem man sie ein- bzw. mehrmals mit sich selbst multipliziert:

$$\mathcal{A}^2 = \mathcal{A} \cdot \mathcal{A} \qquad a_{ik}^{(2)} = \sum_{r = 1, 2, \ldots, n} a_{ir} a_{rk}$$
$$\mathcal{A}^3 = \mathcal{A}^2 \cdot \mathcal{A} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{A}^2 \qquad a_{ik}^{(3)} = \sum_{r,s = 1, 2, \ldots, n} a_{ir} a_{rs} a_{sk} ,$$

wenn $a_{ik}^{(\nu)}$ die Elemente der Matrix $\mathcal{A}^\nu$ sind.

Allgemein gilt

$$\mathcal{A}^\mu \cdot \mathcal{A}^\nu = \mathcal{A}^\nu \cdot \mathcal{A}^\mu = \mathcal{A}^{\mu + \nu} . \tag{31}$$

für beliebige positive ganze Zahlen μ und ν . Für μ oder $\nu = 0$

geht Gleichung (31) in Gleichung (30) über, wenn als nullte Potenz der Matrix $\mathfrak{A}$ die Einheitsmatrix

$$\mathfrak{A}^0 = \mathfrak{E}$$

betrachtet wird.

Eine aus den Potenzen $\mathfrak{A}^\nu$ ($\nu = 0, 1, 2, \ldots, p$) zusammengesetzte Summe

$$a_0 \mathfrak{E} + a_1 \mathfrak{A} + a_2 \mathfrak{A}^2 + \ldots + a_p \mathfrak{A}^p$$

heisst eine ganz rationale Funktion oder ein Polynom der Matrix $\mathfrak{A}$.

Gültigkeit der Multiplikationsgesetze.

Für die Multiplikation von Matrizen (ebenso für die Multiplikation von Matrizen und einem Vektor) gilt das assoziative Gesetz:

$$(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{Z}) \cdot \mathfrak{L} = \mathfrak{A} \cdot (\mathfrak{Z} \cdot \mathfrak{L}) \quad , \quad (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{Z}) \mathfrak{k} = \mathfrak{A} \cdot (\mathfrak{Z} \mathfrak{k}) \; .$$

Ebenso gilt das distributive Gesetz; z.B.

$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{Z}) \cdot \mathfrak{L} = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{L} + \mathfrak{Z} \cdot \mathfrak{L} \quad ,$$
$$(\mathfrak{A} + K \mathfrak{Z}) \cdot \mathfrak{k} = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{k} + K \cdot \mathfrak{Z} \cdot \mathfrak{k} \; .$$

Das kommutative Gesetz gilt für die Multiplikation zweier Matrizen nur in Sonderfällen, und zwar immer dann, wenn die beiden Matrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{Z}$ als Polynome einer dritten Matrix $\mathfrak{L}$ dargestellt werden können. Ist z.B.

$$\mathfrak{A} = a_0 \mathfrak{E} + a_1 \mathfrak{L} + \ldots + a_p \cdot \mathfrak{L}^p \quad ,$$
$$\mathfrak{Z} = b_0 \mathfrak{E} + b_1 \mathfrak{L} + \ldots + b_q \cdot \mathfrak{L}^q \quad ,$$

so ist

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{Z} = \sum_{i=0,1,\ldots,p} a_i \mathfrak{L}^i \cdot \sum_{K=0,1,\ldots,q} b_K \cdot \mathfrak{L}^K = \sum_{\substack{i=0,1,\ldots,p \\ K=0,1,\ldots,q}} \sum a_i \, b_K \cdot \mathfrak{L}^{i+K} = \tag{32}$$
$$= \sum_{K=0,1,\ldots,q} b_K \cdot \mathfrak{L}^K \sum_{i=0,1,\ldots,p} a_i \cdot \mathfrak{L}^i = \mathfrak{Z} \cdot \mathfrak{A} \; .$$

Reziproke Matrix.

Eine Matrix $\mathfrak{Z}$, die, mit der Matrix $\mathfrak{A}$ multipliziert, die Einheitsmatrix ergibt, heisst zu $\mathfrak{A}$ reziprok. Zwischen den Elementen

der Matrix $\mathfrak{A}$ und denen der reziproken Matrix $\mathfrak{Z}$ bestehen die Beziehungen

$$b_{ki} = (-1)^{i+k} \cdot \frac{A_{ik}}{D} \quad , \tag{33}$$

wenn b_{ki} das Element der k-ten Zeile und i-ten Spalte der Matrix $\mathfrak{Z}$ ist, wenn ferner D die Determinante der Matrix $\mathfrak{A}$ und A_{ik} die zu a_{ik} komplementäre Unterdeterminante, also die durch Streichung der i-ten Zeile und der k-ten Spalte von $\mathfrak{A}$ erhaltene Unterdeterminante (n-1)-ter Ordnung ist.

Ist $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{Z} = \mathfrak{E}$, so ist auch $\mathfrak{Z} \cdot \mathfrak{A} = \mathfrak{E}$.

Die reziproke Matrix wird durch das Symbol $\mathfrak{A}^{-1}$ dargestellt:

$$\mathfrak{A}^{-1} \cdot \mathfrak{A} = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{E} \; . \tag{34}$$

Lineare Abhängigkeit von Vektoren.

Die Vektoren

$$\mathfrak{e}^1, \mathfrak{e}^2, \cdots, \mathfrak{e}^m$$

heissen linear abhängig, wenn einer dieser m Vektoren als lineare Zusammensetzung der übrigen (m-1) Vektoren dargestellt werden kann, z.B.

$$\mathfrak{e}^m = \alpha_1 \mathfrak{e}^1 + \alpha_2 \mathfrak{e}^2 + \cdots + \alpha_{m-1} \mathfrak{e}^{m-1} \; .$$

m Vektoren $\mathfrak{e}^1, \mathfrak{e}^2, \ldots, \mathfrak{e}^m$ heissen q-fach linear abhängig, wenn (m-q) dieser Vektoren voneinander linear unabhängig sind, während die übrigen q Vektoren als lineare Zusammensetzung der (m-q) Vektoren dargestellt werden können, z.B.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{e}^{m-q+1} &= \alpha_1 \mathfrak{e}^1 + \alpha_2 \mathfrak{e}^2 + \cdots + \alpha_{m-q} \mathfrak{e}^{m-q} \quad , \\
\mathfrak{e}^{m-q+2} &= \beta_1 \mathfrak{e}^1 + \beta_2 \mathfrak{e}^2 + \cdots + \beta_{m-q} \mathfrak{e}^{m-q} \quad , \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\mathfrak{e}^m &= \varsigma_1 \mathfrak{e}^1 + \varsigma_2 \mathfrak{e}^2 + \cdots + \varsigma_{m-q} \mathfrak{e}^{m-q} \; .
\end{aligned}$$

Eine Determinante hat dann und nur dann den Wert Null, wenn ihre Zeilen (oder Spalten) voneinander linear abhängig sind.

Der Rang einer Matrix.

Sind die Zeilen einer Matrix q-fach voneinander linear abhängig, so sind auch die Spalten genau q-fach voneinander linear abhängig.

Der Rang einer Matrix ist die Anzahl der voneinander linear unabhängigen Zeilen (Spalten). Eine n-reihige quadratische Matrix hat also den Rang r = n - q, wenn ihre Zeilen genau q-fach voneinander linear abhängig sind.

In einer Matrix vom Rang r haben sämtliche Unterdeterminanten von höherer als r-ter Ordnung den Wert Null, da zwischen je (r+1) Zeilen stets eine lineare Abhängigkeit besteht.

Andererseits ist bekanntlich *) in einer Determinante vom Range r stets mindestens eine Unterdeterminante r-ter Ordnung von Null verschieden.

Die Zahl q = n-r, um die der Rang (r) einer Matrix kleiner ist als deren Ordnung (n), soll als "Rangabfall" der Matrix bezeichnet werden.

Einige grundlegende Sätze.

Satz 1. $\mathfrak{x}^1, \mathfrak{x}^2, \ldots, \mathfrak{x}^n$ seien n voneinander linear unabhängige Vektoren n-ter Ordnung. Dann lässt sich jeder andere Vektor n-ter Ordnung als lineare Zusammensetzung dieser n Vektoren darstellen:

$$\mathfrak{z} = \alpha_1 \mathfrak{x}^1 + \alpha_2 \mathfrak{x}^2 + \ldots + \alpha_n \mathfrak{x}^n \quad . \tag{35}$$

Beweis: Aus dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \alpha_1 x_{11} + \alpha_2 x_{21} + \ldots + \alpha_n x_{n1} &= z_1 \\ \alpha_2 x_{12} + \alpha_2 x_{22} + \ldots + \alpha_n x_{n2} &= z_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \alpha_1 x_{1n} + \alpha_2 x_{2n} + \ldots + \alpha_n x_{nn} &= z_n \end{aligned} \tag{35'}$$

können die Koeffizienten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ eindeutig bestimmt werden, da die aus den Elementen x_{ik} gebildete Determinante des Gleichungssystems (35') wegen der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $\mathfrak{x}^1, \mathfrak{x}^2, \ldots, \mathfrak{x}^n$ von Null verschieden ist.

Satz 2. Falls die n Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ einer Matrix sämtlich voneinander verschieden sind, so sind die zugehörigen n Eigenlösungen voneinander linear unabhängig.

Beweis: Jedem Eigenwert λ_i entspricht eine von Null verschiedene Eigenlösung $\mathfrak{x}^i$.

Bestünde nun zwischen den n Eigenlösungen eine Gleichung

$$\alpha_1 \mathfrak{x}^1 + \alpha_2 \mathfrak{x}^2 + \ldots + \alpha_n \mathfrak{x}^n = 0 \quad , \tag{36}$$

wobei mindestens einer der Koeffizienten α_i von Null verschieden wäre, dann gälten auch folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \cdot \sum \alpha_i \mathfrak{x}^i &= \lambda_1 \alpha_1 \mathfrak{x}^1 + \lambda_2 \alpha_2 \mathfrak{x}^2 + \ldots + \lambda_n \alpha_n \mathfrak{x}^n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \mathfrak{A}^{n-1} \cdot \sum \alpha_i \mathfrak{x}^i &= \lambda_1^{n-1} \alpha_1 \mathfrak{x}^1 + \lambda_2^{n-2} \alpha_2 \mathfrak{x}^2 + \ldots + \lambda_n^{n-1} \alpha_n \mathfrak{x}^n = 0 \quad . \end{aligned} \tag{36'}$$

---

*) In allen einführenden Lehrbüchern der Determinantenrechnung behandelt.

Betrachtet man die Ausdrücke $\alpha_i \xi_i$ als die Unbekannten des n-reihigen linearen Gleichungssystems (36, 36'), so hat dieses Gleichungssystem die Determinante

$$N = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} . \qquad (37)$$

Durch Ausmultiplizieren dieser Determinante erhält man das Produkt

$$N = (\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)\cdots(\lambda_n-\lambda_1)\cdot(\lambda_3-\lambda_2)\cdots(\lambda_n-\lambda_2)\cdot\cdots\cdot(\lambda_n-\lambda_{n-1}) \qquad (37')$$

$$= \prod_{(i,K=1,2,\cdots,n;\ i>K)} (\lambda_i - \lambda_K) \quad ;$$

d.h. die Determinante ist gleich dem Produkt aus sämtlichen Differenzen zwischen je zwei Eigenwerten der Matrix $\mathfrak{A}$. (Man gelangt zu diesem Ergebnis, indem man z.B. von der zweiten bis n-ten Zeile der obigen Determinante das λ_1-fache der jeweils vorausgehenden Zeile subtrahiert; man kann dann die Faktoren $(\lambda_2-\lambda_1), (\lambda_3-\lambda_1)$ .... $(\lambda_n-\lambda_1)$ ausklammern u.s.f.)

Falls alle λ_i voneinander verschieden sind, so ist also die Determinante von Null verschieden. Folglich kann das Gleichungssystem (36) nur erfüllt sein, wenn alle

$$\alpha_i \xi_i = 0 .$$

Da nun alle $\xi_i \neq 0$ sind, müssten alle $\alpha_i = 0$ sein, was der Voraussetzung widerspricht.

Satz 3. Sind alle Eigenwerte einer Matrix voneinander verschieden, so kann jeder beliebige Vektor als lineare Zusammensetzung der n Eigenlösungen $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n$ dargestellt werden.

Der Beweis dieses Satzes folgt unmittelbar aus Satz 1 und 2.

Satz 4. Für jede Matrix n-ter Ordnung gilt die Gleichung

$$\mathfrak{A}^n + k_1 \mathfrak{A}^{n-1} + k_2 \mathfrak{A}^{n-2} + \cdots + k_{n-1} \mathfrak{A} + k_n \mathfrak{E} = 0 , \qquad (38)$$

wenn $k_i = (-1)^i \cdot s_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$ die Koeffizienten der ausmultiplizierten Säkulargleichung sind:

$$\lambda^n + k_1 \lambda^{n-1} + k_2 \lambda^{n-2} + \cdots + k_{n-1} \lambda + k_n = 0 . \qquad (3)$$

Dieser Satz ist als "HAMILTON - CAYLEY'SCHE GLEICHUNG" bekannt.*)

*) z.B. Böcher - Beck, Einführung in die höhere Algebra (Leipzig 1910), Seite 319.

2. Ableitung des Verfahrens.

a) Berechnung der Eigenwerte.

Das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}(a_{11}-\lambda)x_1 &+ a_{12}\,x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0\\ a_{21}\,x_1 &+ (a_{22}-\lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{n1}\,x_1 &+ a_{n2}\,x_2 + \dots + (a_{nn}-\lambda)x_n = 0\end{aligned} \qquad (1)$$

wird durch folgende Vektorengleichung dargestellt

$$\mathfrak{A}\mathfrak{x} - \lambda\mathfrak{x} = 0$$

oder auch

$$(\mathfrak{A}-\lambda\mathfrak{E})\cdot\mathfrak{x} = 0\,. \qquad (1')$$

Gesucht sind die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ und die dazugehörigen Eigenlösungen $\mathfrak{x}^1, \mathfrak{x}^2, \dots, \mathfrak{x}^n$.

*) Vorausgesetzt sei zunächst, dass sämtliche n Eigenwerte voneinander verschieden sind; dann sind (nach Satz 2) die n Eigenlösungen voneinander linear unabhängig.

$\mathfrak{z}_1 = \begin{pmatrix} z_{11}\\ z_{12}\\ \vdots\\ z_{1n}\end{pmatrix}$ sei ein beliebiger Vektor. Dann ist nach Satz 4

$$(\mathfrak{A}^n + k_1\mathfrak{A}^{n-1} + \dots + k_n\mathfrak{E})\cdot\mathfrak{z}_1 = 0\,,$$

folglich

$$k_n\mathfrak{z}_1 + k_{n-1}\cdot(\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{z}_1) + k_{n-2}\cdot(\mathfrak{A}^2\cdot\mathfrak{z}_1) + \dots + k_1\cdot(\mathfrak{A}^{n-1}\mathfrak{z}_1) + \mathfrak{A}^n\mathfrak{z}_1 = 0.$$

Die Vektoren

$$\mathfrak{z}_2 = \mathfrak{A}\cdot\mathfrak{z}_1\,,\quad \mathfrak{z}_3 = \mathfrak{A}^2\cdot\mathfrak{z}_1\,,\quad \dots\,,\quad \mathfrak{z}_{n+1} = \mathfrak{A}^n\cdot\mathfrak{z}_1$$

können leicht berechnet werden: Jeder dieser Vektoren ergibt sich aus dem vorhergehenden durch Multiplikation mit der Matrix $\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{z}_{i+1} = \mathfrak{A}\cdot\mathfrak{z}_i\,.$$

Die Vektorengleichung

$$k_n\mathfrak{z}_1 + k_{n-1}\mathfrak{z}_2 + \dots + k_1\mathfrak{z}_n + \mathfrak{z}_{n+1} = 0 \qquad (39)$$

enthält, entsprechend den n Komponenten der bekannten Vektoren $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \dots, \mathfrak{z}_{n+1}$, ein System von n linearen Gleichungen für die n noch unbekannten Koeffizienten $k_1, k_2, \dots, k_n$:

*) Sonderfall mit mehrfachen Eigenwerten : vgl. Abschn. IX.

$$k_n z_{11} + k_{n-1} z_{21} + \dots + k_1 z_{n1} = - z_{n+1,1} ,$$

$$k_n z_{12} + k_{n-1} z_{22} + \dots + k_1 z_{n2} = - z_{n+1,2} , \qquad (39')$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$k_n z_{1n} + k_{n-1} z_{2n} + \dots + k_1 z_{nn} = - z_{n+1,n} .$$

Falls die Vektoren $\mathfrak{z}_1 , \mathfrak{z}_2 , \dots , \mathfrak{z}_n$ voneinander linear unabhängig sind (was meistens der Fall sein wird), so ist die Determinante des Gleichungssystems (39')

$$\begin{vmatrix} z_{11} & z_{21} & \dots & z_{n1} \\ z_{12} & z_{22} & \dots & z_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{1n} & z_{2n} & \dots & z_{nn} \end{vmatrix} \qquad (40)$$

von Null verschieden. Das Gleichungssystem (39') ist dann eindeutig lösbar. Man kann die Koeffizienten $k_1 , k_2 , \dots , k_n$ berechnen und aus der Gleichung (3) die n Eigenwerte $\lambda_1 , \lambda_2 , \dots , \lambda_n$ bestimmen.

Sind die Vektoren $\mathfrak{z}_1 , \mathfrak{z}_2 , \dots , \mathfrak{z}_n$ voneinander linear abhängig, so liegt ein Sonderfall vor, der am Schluss dieses Abschnittes noch ausführlich behandelt wird.

<u>Beispiel:</u>

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 0 \\ 10 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Für den Vektor $\mathfrak{z}_1$ wählt man, um eine möglichst bequeme Rechnung zu erhalten, am besten einen Einheitsvektor, z.B.

$$\mathfrak{z}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \text{ dann ist } \mathfrak{z}_2 = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{z}_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} , \ \mathfrak{z}_3 = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{z}_2 = \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \\ 20 \end{pmatrix} , \ \mathfrak{z}_4 = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{z}_3 = \begin{pmatrix} 3500 \\ 2790 \\ 320 \end{pmatrix} .$$

Aus dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1 \cdot k_3 + 10 \cdot k_2 + 200\, k_1 &= - 3500 \\ 10\, k_2 + 150\, k_1 &= - 2790 \\ 20\, k_1 &= - 320 \end{aligned}$$

findet man die Koeefizienten

$$k_1 = - 16 , \qquad k_2 = - 39 , \qquad k_3 = + 90 .$$

Die Wurzeln der Gleichung

$$\lambda^3 - 16 \lambda^2 - 39 \lambda + 90 = 0$$

sind die 3 gesuchten Eigenwerte

$$\lambda_1 = 17{,}898 , \quad \lambda_2 = - 3{,}384 , \quad \lambda_3 = 1{,}486 .$$

b) Berechnung der Eigenlösungen.

Wenn man auf diese Weise die sämtlichen Eigenwerte λ_i $(i=1,2,\ldots,n)$ berechnet hat, so kann man leicht und mit geringem Arbeitsaufwand auch die dazugehörigen Eigenlösungen ξ_i $(i=1,2,\ldots,n)$ bestimmen, die der Gleichung

$$(\mathfrak{A}-\lambda_i \mathfrak{E})\cdot \xi_i = 0$$

genügen.

Der Vektor z_1 kann nach Satz 3, falls alle Eigenwerte der Matrix $\mathfrak{A}$ voneinander verschieden sind, stets als lineare Zusammensetzung der n Eigenlösungen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ dargestellt werden:

$$\begin{aligned} z_1 &= \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \ldots + \alpha_n \xi_n \\ &= \xi_1' + \xi_2' + \ldots + \xi_n' \quad . \end{aligned} \tag{41}$$

Die Vektoren $\xi_i' = \alpha_i \xi_i$ sind den betreffenden Eigenlösungen ξ_i proportional, sie sind also selbst Eigenlösungen, wenn $\alpha_i \neq 0$. Falls von den n Eigenlösungen ξ_i (i=1,2, ...,n) eine oder mehrere in dem gewählten Vektor z_1 nicht enthalten sind (wenn also einzelne der Faktoren $\alpha_i = 0$ sind), so liegt der schon erwähnte Sonderfall vor, der am Schluss dieses Abschnittes noch zu betrachten ist.

Wird z_1 mit der Matrix $\mathfrak{A}$ multipliziert, so erhält man

$$\begin{aligned} z_2 = \mathfrak{A}\cdot z_1 &= \mathfrak{A}\cdot(\xi_1' + \xi_2' + \ldots + \xi_n') \\ &= \lambda_1 \xi_1' + \lambda_2 \xi_2' + \ldots + \lambda_n \xi_n' \quad . \end{aligned}$$

Für die Berechnung der n Vektoren ξ_i' werden n Gleichungen benötigt:

$$\begin{aligned} \xi_1' + \xi_2' + \ldots + \xi_n' &= z_1 \quad , \\ \lambda_1 \xi_1' + \lambda_2 \xi_2' + \ldots + \lambda_n \xi_n' &= z_2 \quad , \\ \lambda_1^2 \xi_1' + \lambda_2^2 \xi_2' + \ldots + \lambda_n^2 \xi_n' &= z_3 \quad , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \lambda_1^{n-1} \xi_1' + \lambda_2^{n-1} \xi_2' + \ldots + \lambda_n^{n-1} \xi_n' &= z_n \quad . \end{aligned} \tag{42}$$

Aus diesem linearer Gleichungssystem kann man in sehr einfacher und bequemer Weise die einzelnen Vektoren ξ_i' berechnen. Der vektorielle Charakter der Unbekannten ξ_i' sowie der bekannten Vektoren z_i hat auf den Rechnungsgang keinen Einfluss. Man kann z.B. die Cramer'sche Regel anwenden und erhält z.B. für ξ_1' :

$$\mathfrak{z}_1' = \begin{vmatrix} z_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_2 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_n \\ z_3 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_n & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \qquad (43)$$

Die Nennerdeterminante ist, wie bereits auf Seite 54 gezeigt, gleich dem Produkt aller Differenzen von je zwei λ - Werten

$$N = \prod_{i,K=1,2,\dots,n;\ i>K} (\lambda_i - \lambda_K) .$$

Von diesen Differenzen $(\lambda_i - \lambda_K)$ sind alle diejenigen, für die $K \neq 1$ ist, auch in der Zählerdeterminante von (43) als Teiler enthalten. (Wenn man nämlich von der i-ten Spalte der Determinante die k-te Spalte subtrahiert, so sind alle Elemente dieser umgeformten Spalte durch $(\lambda_i - \lambda_K)$ teilbar; folglich ist auch die Determinante durch $(\lambda_i - \lambda_K)$ teilbar).

Man kann also durch diesen gemeinsamen Faktor kürzen und behält als Nenner den Ausdruck

$$(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1) \dots (\lambda_n - \lambda_1) = \prod_{i=2,3,\dots,n} (\lambda_i - \lambda_1) .$$

Multipliziert man diesen Ausdruck noch mit $(-1)^{n-1}$, so erhält man

$$\prod_{i=2,3,\dots,n} (\lambda_1 - \lambda_i) = \lambda_1^{n-1} - \lambda_1^{n-2} \cdot \sum_{(i>1)} \lambda_i + \lambda_1^{n-3} \cdot \sum_{(i>K>1)} \lambda_i \lambda_K - \lambda_1^{n-4} \cdot \sum_{(i>K>\ell>1)} \lambda_i \lambda_K \lambda_\ell +$$

$$+ \dots + (-1)^{n-1} \cdot \lambda_n \cdot \lambda_{n-1} \cdot \lambda_{n-2} \cdots \lambda_2 . \qquad (44)$$

Der Zähler von (43) unterscheidet sich von dem Nenner nur dadurch, dass der Ausdruck λ_1^r jedesmal durch den Vektor z_{r+1} zu ersetzen ist. Man erhält also

$$\mathfrak{z}_1' = \frac{z_n - z_{n-1} \cdot \sum_{(i>1)} \lambda_i + z_{n-2} \cdot \sum_{(i>K>1)} \lambda_i \lambda_K - \dots + z_1 \cdot (-1)^{n-1} \cdot \prod_{i=2,3,\dots,n} \lambda_i}{\prod_{i=2,3,\dots,n} (\lambda_1 - \lambda_i)} . \qquad (45)$$

Im allgemeinen wird es genügen, nur den Zählerausdruck zu berechnen; denn der Zähler stellt einen Vektor dar, der ebenfalls der gesuchten Eigenlösung $\mathfrak{z}_1$ proportional ist. Nur wenn man aus besonderen Gründen feststellen will, wie gross der in z_1 ent-

haltene Anteil der Eigenlösung ξ_1 ist, muss der Nennerausdruck ebenfalls berechnet und der Zähler-Vektor in seinen sämtlichen Komponenten durch den Nenner dividiert werden.

Zahlenbeispiel.

Es sei die Aufgabe gestellt, in dem obigen Zahlenbeispiel die zu $\lambda_1 = 17{,}898$ gehörige Eigenlösung ξ_1 zu berechnen.

Aus den beiden anderen Eigenwerten $\lambda_2 = -3{,}384$ und $\lambda_3 = 1{,}486$ findet man

$$\sum_{(i>1)} \lambda_i = \lambda_2 + \lambda_3 = -1{,}898, \quad \sum_{(i>k>1)} \lambda_i \lambda_k = \lambda_2 \cdot \lambda_3 = -5{,}029.$$

In dem Ausdruck

$$\xi_1' = \frac{z_3 - (\lambda_2+\lambda_3) z_2 + \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot z_1}{(\lambda_1-\lambda_2)\cdot(\lambda_1-\lambda_3)}$$

kann der Nenner ausser Betracht bleiben und man erhält

$$\xi_1'' = \begin{pmatrix}200\\150\\20\end{pmatrix} + 1{,}898 \cdot \begin{pmatrix}10\\10\\0\end{pmatrix} + 5{,}029 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}213{,}951\\168{,}98\\20{,}0\end{pmatrix}.$$

Man kann die Genauigkeit dieser Eigenlösung und gleichzeitig die des Eigenwertes λ_1 nachprüfen, indem man noch mit der Matrix α multipliziert:

$$\alpha \cdot \xi_1'' = \begin{pmatrix}10 & 10 & 0\\10 & 5 & 2\\0 & 2 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}213{,}951\\168{,}98\\20{,}0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3829{,}31\\3024{,}41\\357{,}96\end{pmatrix}.$$

Die beiden Vektoren ξ_1'' und $\alpha \cdot \xi_1''$ müssen einander proportional sein, und zwar muss das Verhältnis $\xi_1'' : \alpha \cdot \xi_1''$ in allen Komponenten = 1 : λ_1 sein:

3829,31	:	213,951	=	17,898070
3024,41	:	168,98	=	17,898035
357,96	:	20	=	17,898000 .

Die Verhältniszahlen der 3 Komponenten stimmen also gut miteinander überein.

Auf die gleiche Weise findet man die beiden anderen Eigenlösungen:

$$\xi_2'' = \begin{pmatrix}200\\150\\20\end{pmatrix} - 19{,}384 \cdot \begin{pmatrix}10\\10\\0\end{pmatrix} + 26{,}596 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}32{,}736\\-43{,}86\\20{,}0\end{pmatrix}$$

und

$$\xi_3'' = \begin{pmatrix}200\\150\\20\end{pmatrix} - 14{,}514 \begin{pmatrix}10\\10\\0\end{pmatrix} - 60{,}567 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5{,}707\\+4{,}86\\+20{,}0\end{pmatrix}.$$

Will man noch die Grösse der in $z_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ enthaltenen Anteile ξ_1', ξ_2' und ξ_3' feststellen, so müssen die berechneten Vektoren noch durch die entsprechenden Nennerausdrücke dividiert werden. Man erhält dann:

$$\xi_1' = \frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)} \cdot \xi_1'' = \begin{pmatrix}0{,}6125\\0{,}4838\\0{,}0573\end{pmatrix}$$

und entsprechend

$$\xi_2' = \begin{pmatrix}0{,}3159\\-0{,}4230\\0{,}1930\end{pmatrix}, \qquad \xi_3' = \begin{pmatrix}0{,}0714\\-0{,}0608\\-0{,}2502\end{pmatrix}.$$

Die Summe dieser drei Vektoren muss den Vektor $z_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ ergeben; man erhält

$$\xi_1' + \xi_2' + \xi_3' = \begin{pmatrix}0{,}6125 + 0{,}3159 + 0{,}0714\\0{,}4838 - 0{,}4230 - 0{,}0608\\0{,}0573 + 0{,}1930 - 0{,}2502\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}9998\\0{,}0000\\0{,}0001\end{pmatrix}.$$

3. Bestimmung der erforderlichen Rechenarbeit.

Einen Ueberblick über die erforderliche Rechenarbeit gewinnt man am besten durch Zählung der einzelnen erforderlichen Rechenoperationen, und zwar mag auch hier eine Zählung der Multiplikationen und Divisionen genügen.

Es muss allerdings gerade bei diesem Verfahren betont werden, dass die Anzahl der Multiplikationen und Divisionen nicht allein massgebend ist für den gesamten notwendigen Arbeitsaufwand. Besonders dann, wenn verschiedene Verfahren miteinander verglichen werden sollen, müssen noch andere Faktoren mitberücksichtigt werden. Vergleichende Betrachtungen über die Vor- und Nachteile der einzelnen Verfahren sollen am Schluss dieser Arbeit gebracht werden.

Für die Multiplikation eines Vektors mit einer Matrix sind n^2 Produkte aus je 2 Zahlen zu bilden. Wählt man für z_1 einen der n Einheitsvektoren, so ist z_2 eine Spalte der Matrix. Die übrigen (n-1) Vektoren $z_3, z_4, \ldots, z_{n+1}$ müssen berechnet werden ; hierzu sind erforderlich:

$$(n-1) \cdot n^2 \text{ Multiplikationen.}$$

Zur Auflösung des linearen Gleichungssystems (39') mit n Gleichungen und den n Unbekannten $k_1, k_2, \ldots, k_n$ sind, wenn z_0 ein Einheitsvektor ist, insgesamt

$\frac{n(n-1)}{2}$ Divisionen und $\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$ Multiplikationen,

zusammen also $\frac{n(n-1)(n+1)}{3}$ Operationen erforderlich.

Die Gesamtzahl der notwendigen Multiplikationen und Divisonen für die Berechnung der Koeffizienten $k_1, k_2, \ldots, k_n$ beträgt also

$$(n-1)n^2 + \frac{n(n-1)(n+1)}{3} = \frac{n(n-1)(4n+1)}{3}.$$

Zahlentabelle über die erforderliche Rechenarbeit.

n =	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
Berechnung der Vektoren $z_1 \ldots z_{n-1}$	18	48	100	180	294	448	648	900	3150	7600
Auflösung des lin. Gleichungs-systems.	8	20	40	70	112	168	240	330	1120	2660
zusammen also	26	68	140	250	406	616	888	1230	4270	10260

Für die Ermittlung der Eigenlösungen sind weiter noch folgende Rechnungen notwendig:

1) Berechnung der Ausdrücke $\Sigma \lambda_i$, $\Sigma \lambda_i \lambda_k$ usw., die in Gleichung (45) als Koeffizienten der Vektoren $z_{n-1}, \ldots, z_1$ erscheinen.

Um z.B. die Eigenlösung ξ_1'' (proportional ξ_1 und ξ_1') zu bestimmen, sind die Koeffizienten

$$\sum_{i=2,3,\ldots,n} \lambda_i, \quad \sum_{2 \le i < k \le n} \lambda_i \lambda_k, \quad \sum_{2 \le i < k < l \le n} \lambda_i \lambda_k \lambda_l, \quad \ldots, \quad \prod_{i=2,3,\ldots,n} \lambda_i \qquad (46)$$

zu berechnen. Das geschieht am besten in der Weise, dass man das Produkt

$$\prod_{i=2,\ldots,n} (\lambda_1 - \lambda_i) = (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3) \cdots (\lambda_1 - \lambda_n)$$

als Funktion der Grösse $x = \lambda_1$ ausmultipliziert: *)

$$\prod_{i=2,\dots,n}(x-\lambda_i) = (x-\lambda_2)(x-\lambda_3)\cdots\cdots(x-\lambda_n)$$

$$= x^{n-1} - x^{n-2}\cdot\sum_{2\leqq i\leqq n}\lambda_i + x^{n-3}\cdot\sum_{2\leqq i<k\leqq n}\lambda_i\lambda_k - \dots\dots .$$

Die linearen Faktoren werden schrittweise miteinander multipliziert. Für die Multiplikation zweier linearer Ausdrücke $(x-\alpha)\cdot(x-\beta)$ ist die Berechnung eines Produktes aus 2 Zahlen nötig $(\alpha\cdot\beta)$; die Multiplikation einer Funktion r-ten Grades ~~(x +~~ $(x^r + \alpha_1 x^{r-1} + \alpha_2\cdot x^{r-2} + \dots + \alpha_r)$ mit einem linearen Ausdruck $(x-\beta)$ erfordert r Multiplikationen $\alpha_i\cdot\beta$ $(i = 1, \dots, r)$.

Die Gesamtzahl der erforderlichen Multiplikationen für die Berechnung des Ausdrucks

$$(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)\cdots\cdots(x-\lambda_n)$$

beträgt also

$$1 + 2 + \dots\dots + (n-2) = \frac{(n-1)(n-2)}{2} .$$

Hat man auf diese Weise die Koeffizienten (46) der Gleichung(45) ermittelt, so müssen diese noch mit den Vektoren $z_1, z_2, \dots, z_n$ multipliziert werden. Die Multiplikation des Einheitsvektors mit dem entsprechenden Koeffizienten $\prod\lambda_i$ erfordert keine Rechenarbeit, ebenso die Multiplikation des Vektors z_n mit dem Faktor 1. Es bleiben also für (n-2) Vektoren mit je n Komponenten

$$n(n-2) \text{ Multiplikationen.}$$

Insgesamt sind zur Berechnung einer Eigenlösung, wenn die Vektoren $z_1, z_2, \dots, z_n$ bekannt sind,

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} + n(n-2) = \frac{(3n-1)(n-2)}{2}$$

Multiplikationen erforderlich (bzw. nur n^2-n-1).

Die Berechnung der Eigenlösungen ist also bei Verwendung des hier geschilderten Verfahrens sehr bequem und mit verhältnismässig sehr geringer Rechenarbeit möglich. Zum Vergleich sei angeführt, dass die Berechnung einer Eigenlösung durch Auflösung des homogenen

---

*) Für $n>4$ lässt sich der Arbeitsaufwand noch verringern, indem man nach einem Vorschlag von Dr. Zech die bereits bekannte Funktion $\varphi(\lambda) = \prod_{i=1,\dots,n}(\lambda-\lambda_i) = \sum_{\nu=0,\dots,n} K_\nu \lambda^\nu$ durch $(\lambda-\lambda_1)$ dividiert, wofür nur $(n-1)$ Produktbildungen erforderlich sind.

Gleichungssystem

$$(A-\lambda_i E)\cdot \xi = 0$$

mittels Elimination mindestens

$$\frac{(n-1)\cdot(n^2+n-3)}{3}$$

Multiplikationen und Divisionen erfordern würde.

Vergleichstabelle

n =	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
Auflösung eines n-reihigen homog. Gleichungssystems: $\frac{(n-1)(n^2+n-3)}{3}$	6	17	36	65	106	161	232	321	1106	2641
Berechnung n. obigem Verfahren $\frac{(n-2)(3n-1)}{2}$	4	11	21	34	50	69	91	116	286	531

Falls mehrere oder sämtliche Eigenlösungen berechnet werden sollen, so ist noch eine weitere Abkürzung der Rechnung möglich. Will man z.B. die zu λ_1 und λ_2 gehörigen Eigenlösungen ξ_1 und ξ_2 berechnen, so berechnet man am besten zuerst den Ausdruck

$$(x-\lambda_3)(x-\lambda_4)\cdot\ldots\cdot(x-\lambda_n)\,.$$

Multipliziert man dann diesen Ausdruck noch mit $(x-\lambda_2)$, so erhält man die Koeffizienten zur Berechnung von ξ_1, multipliziert man mit $(x-\lambda_1)$, so erhält man die Koeffizienten für ξ_2.

Bei der Berechnung zweier Eigenlösungen sind dann zur Bestimmung der Koeffizienten (46) statt

$$2\cdot\frac{(n-1)(n-2)}{2} \quad \text{nur} \quad \frac{(n+1)(n-2)}{2}$$

und bei der Berechnung sämtlicher Eigenlösungen statt

$$n\cdot\frac{(n-1)(n-2)}{2} \quad \text{nur} \quad \frac{(n+6)\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{6}$$

Multiplikationen nötig.

4. Ein Sonderfall.

Bisher wurde nur der Fall betrachtet, dass die Vektoren

$$z_1 \,,\; z_2 = A z_1 \,,\; z_3 = A^2 z_1 \,,\; \dots \,,\; z_n = A^{n-1} z_1$$

voneinander linear unabhängig sind, dass also aus dem Gleichungssystem (39') die Koeffizienten $k_1, k_2, \dots, k_n$ eindeutig bestimmt werden können.

Sind dagegen diese n Vektoren ein- oder mehrfach voneinander linear abhängig, so hat die Determinante (40) den Wert 0; das Gleichungssystem ist dann nicht eindeutig lösbar. Es soll jedoch im folgenden gezeigt werden, dass man auch in diesem Fall das beschriebene Verfahren verwenden kann, um mindestens die in z_1 enthaltenen Eigenlösungen und die zugehörigen Eigenwerte zu berechnen.

Die n-reihige Determinante (40) möge den Rang m besitzen, d.h. die Vektoren $z_1, z_2, \dots, z_n$ mögen (n-m)-fach voneinander linear abhängig sein. Dann gelten die folgenden Sätze:

1.) Die ersten m Vektoren $z_1, z_2, \dots, z_m$ sind voneinander linear unabhängig.

Beweis:

Wären die Vektoren $z_1, z_2, \dots, z_m$ von einander linear abhängig, so gäbe es einen Vektor z_k $(k \leqq m)$, der als lineare Zusammensetzung der (k-1) ersten Vektoren $z_1, z_2, \dots, z_{k-1}$ dargestellt werden kann:

$$z_k = \beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + \dots + \beta_{k-1} z_{k-1}$$

dann wären aber alle folgenden Vektoren

$$z_{k+1} = A z_k \,,\; z_{k+2} = A^2 z_k \,,\; \dots$$

ebenfalls von den vorhergehenden Vektoren linear abhängig (da allgemein $z_{i+1} = A z_i$):

$$z_{k+1} = A z_k = \beta_1 z_2 + \beta_2 z_3 + \dots + \beta_{k-1} z_k \,,$$

$$z_{k+2} = A z_{k+1} = \beta_1 z_3 + \beta_2 z_4 + \dots + \beta_{k-1} z_{k+1} \,, \dots$$

Die Determinante (40) hätte also höchstens den Rang k - 1, und, da $k \leqq m$, höchstens den Rang m - 1. Das widerspricht der Voraussetzung, dass der Rang = m sein soll.

2.) Der (m+1)-te Vektor $z_{m+1} = A^m z_1$ kann als lineare Zusammensetzung der m ersten Vektoren dargestellt werden:

$$-z_{m+1} = \gamma_1 z_1 + \gamma_2 z_2 + \dots + \gamma_m z_m \,. \qquad (47)$$

Beweis:

Da die Determinante (40) voraussetzungsgemäss den Rang m hat, besteht zwischen den Vektoren z_1 , z_2 , ... , z_{m+1} eine lineare Beziehung:

$$\gamma_1 z_1 + \gamma_2 z_2 + \cdots + \gamma_{m+1} z_{m+1} = 0 \qquad (47)$$

worin die Koeffizienten γ_i (i=1,2, ... , m+1) nicht sämtlich verschwinden. Dann muss der Koeffizient γ_{m+1} von Null verschieden sein, da andernfalls die m Vektoren z_1 , z_2 , ... , z_m voneinander linear abhängig wären.

Man kann daher willkürlich $\gamma_{m+1} = 1$ setzen (bzw. die Gleichung (47') durch γ_{m+1} dividieren):

$$\gamma_1 z_1 + \gamma_2 z_2 + \cdots + \gamma_m z_m + z_{m+1} = 0 \ .$$

3.) Der Vektor z_1 setzt sich aus m Eigenlösungen zusammen (vorausgesetzt, dass sämtliche n Eigenwerte der Matrix $\mathcal{A}$ voneinander verschieden sind).

Die Anzahl der in z_1 enthaltenen Eigenlösungen sei p:

$$z_1 = \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \cdots + \alpha_p \xi_p \qquad (48)$$

Es wird behauptet, dass m = p sei.

Beweis:

Zwischen den Vektoren

$$z_1 \ , \ z_2 = \mathcal{A} \cdot z_1 \ , \ \cdots \ z_p = \mathcal{A}^{p-1} \cdot z_1$$

und den p in z_1 enthaltenen Eigenlösungen $\alpha_i \xi_i$ (i=1,2, ... , p) bestehen die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \cdots + \alpha_p \xi_p = z_1 \\
&\lambda_1 \alpha_1 \xi_1 + \lambda_2 \alpha_2 \xi_2 + \cdots + \lambda_p \alpha_p \xi_p = z_2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\lambda_1^{p-1} \alpha_1 \xi_1 + \lambda_2^{p-1} \alpha_2 \xi_2 + \cdots + \lambda_p^{p-1} \alpha_p \xi_p = z_p
\end{aligned} \qquad (49)$$

Da der Wert der Determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_p \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{p-1} & \lambda_2^{p-1} & \cdots & \lambda_p^{p-1} \end{vmatrix}$ infolge der Ungleichheit der Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ von Null verschieden ist *), ist das Gleichungssystem (49) eindeutig lösbar, d.h. die Vektoren $\alpha_i \xi_i$ können als lineare Zusammensetzungen der p Vektoren $z_1, z_2, \ldots, z_p$ dargestellt werden.

---

*) Vergl. Gleichung (37, 37'), Seite 54.

Folglich ist auch der Vektor

$$z_{p+1} = \lambda_1^p \alpha_1 \xi_1 + \lambda_2^p \alpha_2 \xi_2 + \ldots + \lambda_p^p \alpha_p \xi_p \qquad (49')$$

als lineare Zusammensetzung der ersten p Vektoren darstellbar.

Wäre $m \geq p+1$, so bestünde demnach zwischen den Vektoren $z_1, z_2, \ldots, z_m$ eine lineare Abhängigkeit, was der Voraussetzung und insbesondere dem Satz 1 (Seite 64) widerspricht.

Wäre andererseits $p \geq m+1$, so wären nach Gleichung (47) die Vektoren $z_1, z_2, \ldots, z_p$ voneinander linear abhängig, folglich müssten auch die aus den Gleichungen (49) errechenbaren p Eigenlösungen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ voneinander linear abhängig sein, was nach Satz 2, Seite 53 nicht möglich ist.

4.) Die Koeffizienten $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ der Gleichung (47) können aus den Vektoren $z_1, z_2, \ldots, z_{m+1}$ eindeutig bestimmt werden.

Beweis:

Ein lineares Gleichungssystem mit m Unbekannten in n Gleichungen ($m \leq n$)

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + \ldots + a_{1m} x_m &= r_1 \\ a_{21} x_1 + \ldots + a_{2m} x_m &= r_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1} x_1 + \ldots + a_{nm} x_m &= r_n \end{aligned}$$

ist bekanntlich dann und nur dann eindeutig lösbar, wenn die rechteckige Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

den Rang m besitzt (und $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \ldots \\ r_n \end{pmatrix}$ von den m Vektoren $\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \ldots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$ linear abhängig ist).

Da die Vektorgleichung (47) n lineare Gleichungen für die m Unbekannten $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ enthält, und da ferner die Matrix dieses Gleichungssystems den Rang m besitzt, so sind die Unbekannten $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ durch dieses

Gleichungssystem eindeutig bestimmt und können aus diesem berechnet werden.

5.) Identität und Teilbarkeit von Polynomen.

Zwei Polynome einer Veränderlichen *)

$$f_1 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

und

$$f_2 = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n$$

werden bekanntlich als "identisch" bezeichnet ($f_1 \equiv f_2$), wenn sämtliche Koeffizienten übereinstimmen:

$$a_0 = b_0 \; , \; a_1 = b_1 \; , \; \ldots \; , \; a_n = b_n \; .$$

Die Identität gilt dann für jede Grösse x, die eindeutig potenziert werden kann, also z.B. auch für Matrizen.

Ein Polynom $\varphi(x)$ vom Grade n heisst durch ein Polynom $\psi(x)$ vom Grade m ($m \leq n$) teilbar, wenn es ein Polynom $\chi(x)$ gibt, das die Identität erfüllt:

$$\varphi(x) \equiv \psi(x) \cdot \chi(x) \; .$$

Ist $\varphi(x)$ nicht durch $\psi(x)$ teilbar, so kann man stets eindeutig zwei Polynome $\chi(x)$ und $\rho(x)$ angeben, die die Identität

$$\varphi(x) \equiv \psi(x) \cdot \chi(x) + \rho(x)$$

erfüllen, wobei $\chi(x)$ vom (n-m)-ten Grade und $\rho(x)$ höchstens vom (m-1)-ten Grade ist.

6.) Der Ausdruck

$$\varphi(\alpha) = \alpha^n + k_1 \alpha^{n-1} + k_2 \alpha^{n-2} + \ldots + k_{n-1} \alpha + k_n \mathfrak{E}$$

ist teilbar durch den Ausdruck

$$\psi(\alpha) = \alpha^m + \gamma_m \alpha^{m-1} + \gamma_{m-1} \alpha^{m-2} + \ldots + \gamma_2 \alpha + \gamma_1 \mathfrak{E} \; ,$$

wenn $k_1 \ldots k_n$ die Koeffizienten der Säkulargleichung (3) und $\gamma_1 \ldots \gamma_m$ die Koeefizienten der Gleichung (47) sind, d.h. es gibt einen Ausdruck (n-m)-ten Grades

$$\chi(\alpha) = \alpha^{n-m} + \vartheta_1 \alpha^{n-m-1} + \ldots + \vartheta_{n-m} \mathfrak{E}$$

der die Identität

$$\varphi(\alpha) \equiv \psi(\alpha) \cdot \chi(\alpha) \qquad (50)$$

befriedigt.

---

*) Unter "Polynomen" sind im folgenden stets ganze rationale Funktionen einer Veränderlichen zu verstehen.

Beweis:

Nach Gleichung (47) ist $\psi(\alpha)\cdot z_1 = 0$. Nach Satz 4 Seite 54 ist ferner $\varphi(\alpha) = 0$, also auch $\varphi(\alpha)\cdot z_1 = 0$

Wäre $\varphi(\alpha)$ nicht durch $\psi(\alpha)$ teilbar, so gäbe es eine Restfunktion $\rho(\alpha)$, in der α höchstens in der (m-1)-ten Potenz vorkommt:

$$\rho(\alpha) \equiv \varphi(\alpha) - \chi(\alpha)\cdot\psi(\alpha) \equiv \xi_1 \mathfrak{E} + \xi_2 \alpha + \ldots + \xi_m \alpha^{m-1} \qquad (51)$$

Der Ausdruck $\rho(\alpha)\cdot z_1$ würde dann ebenfalls verschwinden:

$$\rho(\alpha)\cdot z_1 = \varphi(\alpha)\cdot z_1 - \chi(\alpha)\cdot\psi(\alpha)\cdot z_1 = 0$$

Andererseits ist aber

$$\rho(\alpha)\cdot z_1 = \xi_1 z_1 + \xi_2 \alpha z_1 + \ldots + \xi_m \alpha^{m-1} z_1 \qquad (52)$$
$$= \xi_1 z_1 + \xi_2 z_2 + \ldots + \xi_m z_m \,.$$

Es müsste also eine lineare Abhängigkeit zwischen den Vektoren $z_1, z_2, \ldots, z_m$ bestehen; das ist nach Satz 1 nicht möglich, da voraussetzungsgemäss die Determinante (40) den Rang m hat. Gleichung (52) ist daher nur erfüllbar, wenn die Werte $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ sämtlich = 0 sind. Dann ist nach Gleichung (51) $\rho(\alpha) \equiv 0$; daraus folgt, dass $\varphi(\alpha)$ durch $\psi(\alpha)$ ohne Rest teilbar ist, dass es also ein Polynom $\chi(\alpha)$ gibt, die die Identität

$$\varphi(\alpha) \equiv \chi(\alpha)\cdot\psi(\alpha)$$

erfüllt.

7.) Sämtliche Wurzeln der Gleichung

$$\lambda^m + \gamma_m \lambda^{m-1} + \gamma_{m-1}\lambda^{m-2} + \ldots + \gamma_2\lambda + \gamma_1 = 0 \qquad (53)$$

sind Eigenwerte der Matrix α.

Beweis:

Die unter 6) nachgewiesene Identität $\varphi = \chi\cdot\psi$ gilt, da φ, χ und ψ ganze rationale Funktionen sind, gemäss der unter 5) gegebenen Definition, für jede eindeutig potenzierbare Grösse, insbesondere also auch für skalare Grössen; es ist also

$$\varphi(\lambda) = \chi(\lambda)\cdot\psi(\lambda)\,. \qquad (50')$$

Aus dieser Identität folgt, dass die n Wurzeln der Gleichung

, $\varphi(\lambda) = \lambda^n + K_1\lambda^{n-1} + K_2\lambda^{n-2} + \ldots + K_n = 0$

übereinstimmen mit den m Wurzeln der Gleichung $\psi(\lambda) = 0$ und den (n - m) Wurzeln der Gleichung $\chi(\lambda) = 0$.
Da nun die n Wurzeln der Gleichung $\varphi(\lambda) = 0$ die Eigenwerte der Matrix $\mathfrak{A}$ sind, so folgt, dass sämtliche m Wurzeln der Gleichung

$$\psi(\lambda) = \lambda^m + \gamma_m \lambda^{m-1} + \gamma_{m-1} \lambda^{m-2} + \dots + \gamma_2 \lambda + \gamma_1 = 0 \qquad (53)$$

ebenfalls Eigenwerte von $\mathfrak{A}$ sind.

Berechnung der Eigenwerte.

Der Rechnungsgang für diesen Sonderfall soll aus einem einfachen Zahlenbeispiel gezeigt werden.

Die Matrix, deren Eigenwerte berechnet werden sollen, sei

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 10 & 8 & -7 & -8 \\ 6 & 4 & -3 & -6 \\ 3 & -3 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Der Vektor $\mathfrak{z}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ soll für die Berechnung verwendet werden;

man erhält durch mehrmaliges Multiplizieren mit der Matrix $\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{z}_2 = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{z}_1 = \begin{pmatrix} -15 \\ -9 \\ +1 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{z}_3 = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{z}_2 = \begin{pmatrix} -189 \\ -99 \\ +1 \\ -89 \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{z}_4 = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{z}_3 = \begin{pmatrix} -1977 \\ -999 \\ +1 \\ -977 \end{pmatrix}$$

Die Vektoren $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_4$ sind voneinander linear abhängig; das durch die Vektorengleichung $\gamma_1 \mathfrak{z}_1 + \gamma_2 \mathfrak{z}_2 + \gamma_3 \mathfrak{z}_3 + \gamma_4 \mathfrak{z}_4 = 0$ gegebene Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} -15\gamma_2 - 189\gamma_3 - 1977 &= 0 \\ -9\gamma_2 - 99\gamma_3 - 999 &= 0 \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + 1 &= 0 \\ \gamma_1 - 5\gamma_2 - 89\gamma_3 - 977 &= 0 \end{aligned}$$

ist eindeutig lösbar; man erhält

$$\gamma_1 = -20 \,, \quad \gamma_2 = 32 \,, \quad \gamma_3 = -13 \,.$$

Die Gleichung $\lambda^3 - 13\lambda^2 + 32\lambda - 20 = 0$
besitzt also als Wurzeln drei der Eigenwerte der Matrix $\mathfrak{A}$.
Die Auflösung dieser kubischen Gleichung ergibt

$$\lambda_1 = 10 \,, \quad \lambda_2 = 2 \,, \quad \lambda_3 = 1 \,.$$

Will man auch den noch fehlenden vierten Eigenwert nach dem gleichen Verfahren bestimmen, so muss man mit einem anderen Anfangsvektor die gesamte Rechnung wiederholen.
Wenn wie in diesem Beispiel nur ein Eigenwert fehlt, so kann man diesen auch aus der Summe der Eigenwerte errechnen, die bekanntlich gleich der Summe der Diagonal-Elemente der Matrix α ist:

$$\sum_{i=1,2,\dots,n} \lambda_i = \sum_{i=1,2,\dots,n} a_{ii}$$

Im Beispiel ist $\sum a_{ii} = 10 + 4 + 4 - 1 = 17.$
Aus $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 1$ folgt also

$$\lambda_4 = 17 - (10 + 2 + 1) = 4.$$

Berechnung der Eigenlösungen.

Der Vektor z_1 setzt sich nach Satz 3 aus m Eigenlösungen $\alpha_i \xi^i = \xi^{i'}$ zusammen; diese m Eigenlösungen können nun mit Hilfe der m berechneten Eigenwerte leicht ermittelt werden:

$$\begin{aligned} \xi^{1'} + \xi^{2'} + \dots + \xi^{m'} &= z_1 \\ \lambda_1 \xi^{1'} + \lambda_2 \xi^{2'} + \dots + \lambda_m \xi^{m'} &= z_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ \lambda_1^{m-1} \xi^{1'} + \lambda_2^{m-1} \xi^{2'} + \dots + \lambda_m^{m-1} \xi^{m'} &= z_m \end{aligned} \qquad (54)$$

Durch Auflösung dieses linearen Gleichungssystems findet man die m Eigenlösungen $\xi^{1'}, \xi^{2'}, \dots, \xi^{m'}$.

Beispiel: (n = 4, m = 3)

$$z_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z_2 = \begin{pmatrix} -15 \\ -9 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad z_3 = \begin{pmatrix} -189 \\ -99 \\ 1 \\ -89 \end{pmatrix}; \quad \lambda_1 = 10, \ \lambda_2 = 2, \ \lambda_3 = 1.$$

Das Gleichungssystem (54) lautet dann

$$\begin{aligned} \xi^{1'} + \xi^{2'} + \xi^{3'} &= z_1 \\ 10\,\xi^{1'} + 2\,\xi^{2'} + \xi^{3'} &= z_2 \\ 100\,\xi^{1'} + 4\,\xi^{2'} + \xi^{3'} &= z_3 \end{aligned}$$

Die Auflösung dieses linearen Gleichungssystems nach $\xi^{1'}, \xi^{2'}, \xi^{3'}$ ergibt.

$$\xi^{1'} = \frac{1}{12} \cdot (2 z_1 - 3 z_2 + z_3) = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\xi^{2'} = \frac{1}{8} \cdot (-10 z_1 + 11 z_2 - z_3) = \begin{pmatrix} +3 \\ 0 \\ 0 \\ +3 \end{pmatrix}$$

$$\xi^{3'} = \frac{1}{9} \cdot (20 z_1 - 12 z_2 + z_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \\ +1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Es muss noch nachgewiesen werden, dass die aus Gleichung (53) errechneten Eigenwerte gerade diejenigen sind, die den in z_1 enthaltenen Eigenlösungen entsprechen, die also zur Berechnung dieser Eigenlösungen nach Gleichung (54) gebraucht werden.

Die zu diesen m Eigenlösungen $\xi^1, \xi^2, \cdots, \xi^m$ gehörigen Eigenwerte (die also die Gleichungen $\alpha \xi^i = \lambda_i \xi^i$ (i=1, 2, ... , m) erfüllen), seien $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$. Die Gleichungen (54) können in folgender Form geschrieben und noch durch eine (m+1)-te Gleichung ergänzt werden:

$$\begin{aligned} \xi^1 + \xi^2 + \cdots\cdots + \xi^m - z_1 &= 0 \\ \lambda_1 \xi^1 + \lambda_2 \xi^2 + \cdots\cdots + \lambda_m \xi^m - z_2 &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \lambda_1^m \xi^1 + \lambda_2^m \xi^2 + \cdots\cdots + \lambda_m^m \xi^m - z_{m+1} &= 0 . \end{aligned} \qquad (54')$$

Dieses homogene Gleichungssystem ist erfüllt, wenn die Determinante verschwindet:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots\cdots & 1 & z_1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots\cdots & \lambda_m & z_2 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \lambda_1^m & \lambda_2^m & & \lambda_m^m & z_{m+1} \end{vmatrix} = 0 . \qquad (55)$$

Diese Gleichung gibt eine lineare Beziehung zwischen den Vektoren $z_1, z_2, \cdots, z_{m+1}$ an; da $z_1, \cdots, z_m$ voneinander linear unabhängig sind, gibt es nur eine lineare Beziehung zwischen den Vektoren $z_1, z_2, \cdots, z_{m+1}$.

Die Koeffizienten von $z_1, \cdots, z_{m+1}$ in Gleichung (55) müssen also mit denen der Gleichung (47') identisch sein, (nur verschieden durch einen konstanten Faktor).

Ersetzt man in Gleichung (47') die Vektoren $z_1, z_2, \cdots, z_{m+1}$ durch die Potenzen von λ $(1, \lambda, \lambda^2, \ldots, \lambda^m)$, so erhält man als Wurzeln dieser Gleichung die oben berechneten Eigenwerte. Ersetzt man hingegen in Gleichung (55) die Vektoren $z_1, z_2, \cdots, z_{m+1}$ durch die Potenzen von λ , so erhält man als Wurzeln die zu $\xi^1, \cdots, \xi^m$ gehörigen Eigenwerte, denn gerade für diese Werte λ_i (i=1...m) verschwindet die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots\cdots & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots\cdots & \lambda_m & \lambda_i \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \lambda_1^m & \lambda_2^m & & \lambda_m^m & \lambda_i^m \end{vmatrix} = 0 . \qquad (56)$$

Aus der Identität der beiden Gleichungen folgt, dass auch alle Wurzeln die gleichen sind.

VI. Angenäherte Berechnung einzelner Eigenlösungen und Eigenwerte durch wiederholtes Multiplizieren eines Vektors mit der Matrix.

1. Die Berechnung des grössten Eigenwertes.

Grundlagen des Verfahrens.

Für die Berechnung des grössten Eigenwertes λ_1 *) und der zugehörigen Eigenlösung $\mathfrak{z}_1$ einer gegebenen Matrix $\mathfrak{A}$ eignet sich oft ein bekanntes Verfahren **), das auf folgenden Grundgedanken beruht.

Ein beliebiger Vektor $\mathfrak{z}_0$ kann, wie im vorigen Abschnitt (S. 54) gezeigt wurde, in n Komponenten in Richtung der n Eigenlösungen der Matrix $\mathfrak{A}$ zerlegt werden:

$$\mathfrak{z}_0 = \alpha_1 \mathfrak{z}_1 + \alpha_2 \mathfrak{z}_2 + \ldots\ldots + \alpha_n \mathfrak{z}_n .$$

Bei einer Multiplikation dieses Vektors mit der Matrix $\mathfrak{A}$ wird jede Eigenlösung $\mathfrak{z}_i$ mit dem entsprechenden Eigenwert λ_i multipliziert:

$$\mathfrak{z}_1 = \mathfrak{A}\,\mathfrak{z}_0 = \lambda_1 \alpha_1 \mathfrak{z}_1 + \lambda_2 \alpha_2 \mathfrak{z}_2 + \ldots\ldots + \lambda_n \alpha_n \mathfrak{z}_n .$$

---

*) Als "grösster" ("zweitgrösster", "kleinster") Eigenwert soll stets der dem Betrage nach grösste (bzw. zweitgrösste, kleinste) Eigenwert verstanden werden. Die Eigenwerte seien ihrer absoluten Grösse nach geordnet

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots\ldots > |\lambda_n| ,$$

und zwar möge der Sonderfall zweier oder mehrerer gleichgrosser Eigenwerte $|\lambda_i| = |\lambda_{i+1}|$ zunächst von den Betrachtungen ausgeschlossen werden.

**) Vergl. z.B. v. Mises und Pollaczek-Geiringer, Praktische Verfahren der Gleichungsauflösung. Zeitschr.f.Math.u.Mech. Bd.9 (1929) S.152-164.
Das Verfahren, das dort nur für symmetrische Matrizen abgeleitet ist, kann, wie die folgenden Betrachtungen zeigen, auch für unsymmetrische Matrizen benutzt werden. Das im folgenden angeführte Zahlenbeispiel ist dem genannten Aufsatz entnommen, wo die Rechnung mit sehr hoher Dezimalstellenzahl genau durchgeführt ist.

Multipliziert man den Vektor z_0 p-mal nacheinander mit der Matrix A, so erhält man demgemäss den Vektor

$$z_p = A^p \cdot z_0 = \lambda_1^p \alpha_1 \xi_1 + \lambda_2^p \alpha_2 \xi_2 + \ldots + \lambda_n^p \alpha_n \xi_n . \qquad (57)$$

Vorausgesetzt, dass in dem Vektor z_0 die dem grössten Eigenwert entsprechende Komponente $\alpha_1 \xi_1$ von Null verschieden ist (was man durch zweckmässige Wahl des Vektors z_0 stets erreichen kann), so wird bei wiederholtem Multiplizieren mit der Matrix A die Eigenlösung ξ_1 gegenüber allen anderen Eigenlösungen immer stärker hervortreten:

$$z_p = \lambda_1^p \cdot \left(\alpha_1 \xi_1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^p \cdot \alpha_2 \xi_2 + \ldots + \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^p \cdot \alpha_n \xi_n \right). \qquad (57')$$

Bei hinreichend grossem p kann man stets erreichen, dass in dem Ausdruck (57') sämtliche Anteile $\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^p \cdot \alpha_i \xi_i$ $(i=2,3,\ldots n)$ gegenüber $\alpha_1 \xi_1$ bis auf einen beliebig kleinen Restanteil verschwinden, selbst dann, wenn in dem Vektor z_0 der Anteil $\alpha_1 \xi_1$ wesentlich kleiner ist als der Anteil $\alpha_i \xi_i$ einer anderen Eigenlösung.

Bei genügend hohem p gilt daher angenähert:

$$z_p = A^p \cdot z_0 \approx \lambda_1^p \cdot \alpha_1 \xi_1 ,$$
$$z_{p+1} = A^{p+1} \cdot z_0 \approx \lambda_1^{p+1} \cdot \alpha_1 \xi_1 ,$$

also

$$z_{p+1} \approx \lambda_1 \cdot z_p$$

Praktische Durchführung der Rechnung.

Für die Berechnung des Vektors $z_p = A^p \cdot z_0$ können verschiedene Wege benutzt werden:

a) Man multipliziert den gewählten Vektor z_0 mehrmals mit der Matrix A:

$$A \cdot z_0 = z_1 , \quad A \cdot z_1 = z_2 , \quad A \cdot z_2 = z_3 , \ldots .$$

Diese Rechnung wird solange fortgesetzt, bis zwei aufeinander folgende Vektoren

$$z_p \text{ und } A \cdot z_p = z_{p+1}$$

einander mit hinreichender Genauigkeit proportional sind.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 0 \\ 10 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} , \quad z_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad z_2 = \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \\ 20 \end{pmatrix} , \quad z_3 = \begin{pmatrix} 3500 \\ 2790 \\ 320 \end{pmatrix} , \quad z_4 = \begin{pmatrix} 62900 \\ 49590 \\ 5900 \end{pmatrix} , \quad z_5 = \begin{pmatrix} 1124900 \\ 888750 \\ 105080 \end{pmatrix}$$

Bereits die Vektoren z_2 und z_3 sind in grober Annäherung einander proportional, man kann daher aus ihnen schon die Grössenordnung des Eigenwertes λ_1 feststellen:

$$\begin{aligned} 3500 &: 200 = 17{,}5 \\ 2790 &: 150 = 18{,}3 \\ 320 &: 20 = 16 \end{aligned}$$

Die Genauigkeit wächst bei jeder weiteren Multiplikation mit der Matrix A; man findet z.B. aus z_4 und z_5:

$$\begin{aligned} 1124900 &: 62900 = 17{,}884 \\ 888750 &: 49590 = 17{,}922 \\ 105080 &: 5900 = 17{,}810 \end{aligned}$$

b) Wenn zur Erzielung einer hinreichend genauen Proportionalität zwischen

$$z_p = A^p \cdot z_0 \quad \text{und} \quad z_{p+1} = A \cdot z_p$$

eine sehr hohe Potenz der Matrix A benötigt wird, so ist es oft zweckmässig, zunächst die Matrix A ein- oder mehrmals mit sich selbst zu multiplizieren:

$$A \cdot A = A^2 \,, \quad A^2 \cdot A^2 = A^4 \,, \ldots$$

Man berechnet auf diese Weise z.B. die q-te Potenz der Matrix A. Der Anfangsvektor z_0 wird dann so oft mit der Matrix A^q multipliziert, bis zwei aufeinander folgende Vektoren

$$z_p \quad \text{und} \quad z_{p+q} = A^q \cdot z_p$$

einander mit ausreichender Genauigkeit proportional sind; bei genügend grossem p ist angenähert

$$z_{p+q} \approx \lambda_1^q \cdot z_p$$

Die Proportionalität zweier Vektoren z_p und z_{p+q} wird nachgeprüft, indem man für jede einzelne Komponente den Verhältniswert $z_{p+q} : z_p \approx \lambda_1^p$ berechnet. Aus λ_1^q kann man dann leicht den gesuchten Eigenwert λ_1 bestimmen; die Unterschiede zwischen den aus den einzelnen Komponenten errechneten Werten geben einen Anhaltspunkt für die Beurteilung der erzielten Genauigkeit.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 0 \\ 10 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 200 & 150 & 20 \\ 150 & 129 & 12 \\ 20 & 12 & 5 \end{pmatrix}, \quad A^4 = \begin{pmatrix} 62900 & 49590 & 5900 \\ 49590 & 39285 & 4608 \\ 5900 & 4608 & 569 \end{pmatrix}$$

Die Matrix A^4 soll für die weitere Rechnung benutzt werden; es sei also q = 4.

$$z_0 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad z_4 = \begin{pmatrix}62900\\49590\\5900\end{pmatrix},\quad z_8 = \begin{pmatrix}6450388100\\5094541350\\602977820\end{pmatrix},\quad z_{12} = 10^6\cdot\begin{pmatrix}661925286\\522792325\\61876031\end{pmatrix}$$

Aus z_4 und z_8 findet man:

z_8	:	z_4	$\approx$	λ_1^4	λ_1
6450388100	:	62900	=	102550	17,8951
5094541350	:	49590	=	102733	17,9031
602977820	:	5900	=	102200	17,8798

oder aus z_8 und z_{12} mit wesentlich verbesserter Genauigkeit:

z_{12}	:	z_8	$\approx$	λ_1^4	λ_1
10^6 : 661925286	:	6450388100	=	102617,90	17,898053
10^6 : 522792325	:	5094541350	=	102618,13	17,898063
10^6 : 61876031	:	602977820	=	102617,42	17,898032

Der erforderliche Arbeitsaufwand.

Für jede Multiplikation eines Vektors mit einer Matrix sind n Summen aus je n Produkten zu berechnen, das sind im ganzen

n^2 Produkte aus je zwei Zahlen.

Für die Berechnung des Produktes aus zwei Matrizen sind

n^3 Produkte,

für das Quadrieren einer beliebigen unsymmetrischen Matrix

$n(n^2 - \frac{n-1}{2})$ Produkte,

und für das Quadrieren einer symmetrischen Matrix

$\frac{n(n^2+1)}{2}$ Produkte

zu berechnen.

Die Anzahl der erforderlichen Multiplikationen ist bei diesem Verfahren oft grösser als bei manchem anderen Verfahren, besonders dann, wenn zur Erzielung ausreichender Genauigkeit ein mehrmaliges Quadrieren der Matrix erforderlich ist.

Andererseits hat das Verfahren jedoch wesentliche Vorteile: Die Produktsummen können mit Hilfe einer Rechenmaschine sehr rasch und bequem berechnet werden. Die gleichzeitige Auffindung der Eigenlösung ermöglicht eine einfache und sichere Kontrolle der Rechnung.

Das Verfahren wird daher zur Berechnung des grössten Eigenwertes oft recht vorteilhaft sein, besonders dann, wenn dieser Wert λ_1 beträchtlich (mindestens etwa im Verhältnis 2 : 1) grösser ist als der nächst kleinere Eigenwert λ_2. (Vergl. Seite 99.)

2. Berechnung des zweitgrössten Eigenwertes.

Wesentlich umständlicher gestaltet sich die Berechnung des zweitgrössten Eigenwertes λ_2 und der entsprechenden Eigenlösung ξ_2.

In dem gewählten Anfangsvektor

$$z_0 = \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \ldots + \alpha_n \xi_n$$

möge auch der Anteil der zweiten Eigenlösung $\alpha_2 \xi_2$ von Null verschieden sein.

Der durch p-maliges Multiplizieren mit der Matrix A berechnete Vektor

$$z_p = \lambda_1^p \alpha_1 \xi_1 + \lambda_2^p \alpha_2 \xi_2 + \ldots + \lambda_n^p \alpha_n \xi_n$$

enthält zunächst bei hohem p einen überragend grossen Anteil der ersten Eigenlösung $\lambda_1^p \alpha_1 \xi_1$. Dieser Anteil kann nach dem oben beschriebenen Verfahren mit jeder gewünschten Genauigkeit berechnet und von dem Vektor z_p abgezogen werden.

Der verbleibende Restvektor

$$\begin{aligned} z_p - \lambda_1^p \alpha_1 \xi_1 &= \lambda_2^p \alpha_2 \xi_2 + \lambda_3^p \alpha_3 \xi_3 + \ldots + \lambda_n^p \alpha_n \xi_n \\ &= \lambda_2^p \left(\alpha_2 \xi_2 + \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right)^p \alpha_3 \xi_3 + \ldots + \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_2}\right)^p \alpha_n \xi_n \right) \end{aligned} \qquad (58)$$

ist dann bei genügend hohem p annähernd der zweiten Eigenlösung proportional; denn die Anteile der dritten bis n-ten Eigenlösung

$$\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_2}\right)^p \alpha_i \xi_i \qquad (i = 3, 4, \ldots, n)$$

werden mit wachsendem p immer mehr gegenüber dem Anteil $\alpha_2 \xi_2$ verschwinden.

Annähernd gilt also bei genügend grossem p:

$$z_p - \lambda_1^p \alpha_1 \xi_1 \approx \lambda_2^p \alpha_2 \xi_2 .$$

Die Berechnung des Vektors

$$\lambda_1^p \alpha_1 \xi_1$$

geschieht am besten in der Weise, dass man den Vektor z_p mit der Matrix A^p multipliziert:

$$z_{2p} = A^p z_p = \lambda_1^{2p} \left(\alpha_1 \xi_1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2p} \alpha_2 \xi_2 + \ldots + \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^{2p} \alpha_n \xi_n \right).$$

Wenn die Vektoren z_p und z_{2p} über mehrere Dezimalen einander proportional sind, so kann man daraus im allgemeinen folgern, dass der Vektor z_{2p} ungefähr über die doppelte Dezimalstellenzahl der ersten Eigenlösung proportional ist; denn der Anteil der zweiten Eigenlösung ξ_2, der die Abweichung von der Proportionalität hauptsächlich verursacht, wird bei jeder Multiplikation mit A^p im Verhältnis $\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^p$ verringert. Es kann also näherungsweise gesetzt werden:

$$z_{2p} \approx \lambda_1^{2p} \alpha_1 \xi_1 .$$

Dieser Vektor ist noch durch λ_1^p zu dividieren. Einen hinreichend genauen Wert für λ_1^p findet man, indem man z_{2p} nochmals mit A^p multipliziert; es genügt jedoch, <u>eine</u> Komponente des Vektors

$$z_{3p} = A^p \cdot z_{2p}$$

zu berechnen.

<u>Beispiel</u>:

Im obigen Zahlenbeispiel möge zur angenäherten Berechnung des zweitgrössten Eigenwertes der Vektor

$$z_4 = A^4 \cdot z_0 = \begin{pmatrix} 62900 \\ 49590 \\ 5900 \end{pmatrix}$$

verwendet werden; es sei also p = 4.

z_4 ist, wie oben festgestellt wurde, bereits über etwa 3 Dezimalen der Eigenlösung ξ_1 proportional, z_8 über etwa 6 Dezimalen. Aus z_{12} und z_8 wurde errechnet

$$\lambda_1^4 \approx 102618$$

Es ist also

$$\lambda_1^4 \cdot \alpha_1 \xi_1 \approx \frac{z_8}{\lambda_1^4} = \begin{pmatrix} 62858{,}25 \\ 49645{,}69 \\ 5875{,}95 \end{pmatrix}$$

$$\xi_2' = z_4 - \frac{z_8}{\lambda_1^4} = \begin{pmatrix} 41{,}75 \\ -55{,}69 \\ 24{,}05 \end{pmatrix}$$

Dieser Vektor ist in grober Annäherung der Eigenlösung ξ_2

proportional. Er muss also näherungsweise die Gleichung

$$\alpha \cdot \xi_2 = \lambda_2 \xi_2$$

erfüllen. Man findet durch Multiplikation mit der Matrix α :

$$\alpha \cdot \xi_2' = \begin{pmatrix} -139{,}40 \\ +187{,}15 \\ -87{,}33 \end{pmatrix}$$

und aus dem Verhältnis der einzelnen Komponenten die angenäherten Werte für λ_2 :

$$\begin{array}{rcrl} -139{,}40 & : & 41{,}75 & = -3{,}339 \\ 187{,}15 & : & -55{,}69 & = -3{,}361 \\ -87{,}33 & : & 24{,}05 & = -3{,}631 \end{array}$$

Das Ergebnis der Rechnung ist in diesem Beispiel zunächst sehr ungenau. Die drei für λ_2 errechneten Werte weichen beträchtlich voneinander ab.

Einen wesentlich genaueren Wert für λ_2 findet man in dem hier vorliegenden Fall einer <u>symmetrischen Matrix</u> , indem man das Verhältnis der <u>Längen</u> der beiden Vektoren ξ_2' und $\alpha \cdot \xi_2'$ berechnet:

$$\frac{|\alpha \cdot \xi_2'|}{|\xi_2'|} = \frac{\sqrt{139{,}40^2 + 187{,}15^2 + 87{,}33^2}}{\sqrt{41{,}75^2 + 55{,}69^2 + 24{,}05^2}} = \frac{249{,}166}{73{,}639} = 3{,}3836$$

(Der genaue Wert betrüge $|\lambda_2| = 3{,}38401$).

Will man λ_2 und besonders ξ_2 noch genauer berechnen, so benutzt man hierfür am besten das im Abschnitt IV behandelte Näherungsverfahren.

Theoretisch kann auch das oben beschriebene Verfahren bis zu jeder gewünschten Genauigkeit fortgesetzt werden;; Voraussetzung hierfür ist lediglich, dass die Potenz α^p genügend hoch gewählt und eine ausreichende Dezimalstellenzahl berücksichtigt wird. Bei der praktischen Durchführung der Rechnung ergeben sich jedoch mit wachsendem p immer grössere Schwierigkeiten, weil man dann sehr kleine Differenzen sehr grosser Zahlen berechnen muss, dabei sollen gerade diese kleinen Differenzen mit möglichst hoher Genauigkeit berechnet werden.

Im obigen Beispiel stimmen die Vektoren ξ_4 und $\frac{\xi_8}{\lambda_{1,4}}$ bereits in den ersten drei Dezimalstellen überein. Würde man, um eine grössere Genauigkeit zu erreichen, die Vektoren ξ_8 und $\frac{\xi_{16}}{\lambda_{1,8}}$ voneinander subtrahieren, so würden sich schon die ersten 6 Stellen wegheben; bei ξ_{16} und $\frac{\xi_{32}}{\lambda_{1,16}}$ wären es sogar 11 bis 12 Dezimalstellen. Das bedeutet, dass bei einer 16-stelligen Rechengenauigkeit (deren Durchhaltung selbst bei Verwendung einer 16-stelligen Rechenmaschine

oft schwierig oder mindestens unbequem ist) die Eigenlösung ξ_2 gerade noch über 4 oder 5 Dezimalstellen genau berechnet werden kann.

In dem erwähnten Aufsatz von v.Mises und Pollaczek-Geiringer wird für die Berechnung des zweitgrössten Eigenwertes ein Weg empfohlen, der zwar von dem obigen Verfahren im einzelnen abweicht, der jedoch, wie aus der dortigen Durchrechnung des Zahlenbeispiels zu erkennen ist, zu ähnlichen rechnerischen Schwierigkeiten führt. Der Arbeitsaufwand wird meistens ungefähr der gleiche sein.

Dieses von v.Mises angegebene Verfahren gilt übrigens nur für symmetrische Matrizen; bei der Anwendung auf unsymmetrische Matrizen sind die Formeln in folgender Weise abzuändern:

Der Vektor

$$\xi_2'' = \begin{vmatrix} a_{11}^{(2p)} & a_{12}^{(2p)} \\ u_1^{(p)} & u_2^{(p)} \end{vmatrix} = a_{11}^{(2p)} \cdot u_2^{(p)} - a_{12}^{(2p)} \cdot u_1^{(p)} \qquad (59)$$

ist bei genügend hohem p der gesuchten Eigenlösung ξ_2 annähernd proportional. Darin sind

$u_1^{(p)}$ und $u_2^{(p)}$ die beiden ersten Spalten der Matrix A^p,

$a_{11}^{(2p)}$ und $a_{12}^{(2p)}$ die beiden ersten Elemente der ersten Zeile von A^{2p}

(Statt der ersten Zeile kann man auch jede andere Zeile und statt der beiden ersten Spalten zwei beliebige Spalten der Matrix A^p bzw. A^{2p} benutzen.)

Es soll gezeigt werden, dass der Ausdruck (59), von wenigen Sonderfällen abgesehen, stets nach einem Vielfachen der zweiten Eigenlösung ξ_2 konvergiert.

Es sei

$$u_1^{(p)} = \sum \lambda_i^p \alpha_i \xi_i \quad , \quad u_2^{(p)} = \sum \lambda_i^p \beta_i \xi_i \; .$$

Dann sind die entsprechenden Spalten der Matrix A^{2p}:

$$u_1^{(2p)} = \sum \lambda_i^{2p} \alpha_i \xi_i \quad , \quad u_2^{(2p)} = \sum \lambda_i^{2p} \beta_i \xi_i \; ;$$

und für die erste Komponente dieser Vektoren gelten die Gleichungen

$$a_{11}^{(2p)} = \sum \lambda_i^{2p} \alpha_i x_{i1} \quad , \quad a_{12}^{(2p)} = \sum \lambda_i^{2p} \beta_i x_{i1} \quad ,$$

wenn x_{i1} die ersten Komponenten der einzelnen Eigenlösungen ξ^i sind.

Hieraus folgt

$$\xi_2'' = a_{11}^{(2p)} \cdot u_2^{(p)} - a_{12}^{(2p)} \cdot u_1^{(p)} =$$

$$= \sum_{i,k} \lambda_i^{2p} \alpha_i x_{i1} \cdot \lambda_k^p \beta_k \xi_k - \sum_{i,k} \lambda_i^{2p} \beta_i x_{i1} \cdot \lambda_k^p \alpha_k \xi_k$$

$$= \sum_{i,k} \lambda_i^{2p} \lambda_k^p \cdot (\alpha_i \beta_k - \alpha_k \beta_i) \cdot x_{i1} \cdot \xi_k$$

In dieser Summe verschwinden alle Glieder mit i = k. Den grössten veränderlichen Faktor $\lambda_i^{2p} \lambda_k^p$ hat das Glied

$$\lambda_1^{2p} \lambda_2^p \cdot (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) \cdot x_{11} \cdot \xi_2 \ ,$$

das daher bei genügend hohem p alle anderen Glieder überragt, vorausgesetzt allerdings, dass $\alpha_1 \beta_2 \neq \alpha_2 \beta_1$ und dass ferner die erste Komponente der Eigenlösung ξ_1 von Null verschieden ist: $x_{11} \neq 0$. Diese beiden Voraussetzungen werden aber in praktischen Anwendungsbeispielen fast immer erfüllt sein.

Die Elemente $a_{ik}^{(2p)}$ der Matrix A^{2p} findet man als Produkt der betreffenden Zeilen und Spalten der Matrix A^p :

$a_{ik}^{(2p)} = b_i^{(p)} \cdot u_k^{(p)}$, wenn $b_i^{(p)}$ die i-te Zeile und $u_k^{(p)}$ die k-te Spalte der Matrix A^p ist.

Gleichung (59) kann also auch geschrieben werden:

$$\xi_2'' = \begin{vmatrix} b_1^{(p)} \cdot u_1^{(p)} & b_1^{(p)} \cdot u_2^{(p)} \\ u_1^{(p)} & u_2^{(p)} \end{vmatrix} \qquad (59')$$

Da die beiden Spalten dieser Determinante einander fast proportional sind, wird man bei der praktischen Berechnung am zweckmässigsten vor dem Ausmultiplizieren erst ein Vielfaches der einen Spalte von der anderen Spalte subtrahieren:

$$\xi_2'' = \begin{vmatrix} b_1^{(p)} u_1^{(p)} & b_1^{(p)} \cdot (u_2^{(p)} - K \cdot u_1^{(p)}) \\ u_1^{(p)} & (u_2^{(p)} - K \cdot u_1^{(p)}) \end{vmatrix} \qquad (59'')$$

Setzt man hierin noch

$$u_2^{(p)} - K \cdot u_1^{(p)} = \vartheta \ ,$$

so gelangt man für den Sonderfall der symmetrischen Matrix ($u_1^{(p)} = u_2^{(p)}$) zu der von v.Mises angegebenen Formel

$$\xi_2'' = (u_1^{(p)})^2 \cdot \vartheta - (u_1^{(p)} \cdot \vartheta) \cdot u_1^{(p)} .$$

3. Berechnung des drittgrössten Eigenwertes.

Im vorliegenden Beispiel einer dreireihigen Matrix kann man, nachdem die beiden ersten Eigenwerte und Eigenlösungen bereits bekannt sind, leicht auch den drittgrössten Eigenwert λ_3 und die ihm entsprechende Eigenlösung $\mathfrak{x}_3$ berechnen. Man braucht nur von dem Vektor

$$\mathfrak{z}_0 = \alpha_1 \mathfrak{x}_1 + \alpha_2 \mathfrak{x}_2 + \alpha_3 \mathfrak{x}_3$$

die Anteile der beiden ersten Eigenlösungen zu subtrahieren.

Im obigen Zahlenbeispiel wurde aus dem Vektor $\mathfrak{z}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ berechnet:

$$\lambda_1^8 \alpha_1 \mathfrak{x}_1 \approx A^8 \cdot \mathfrak{z}_0 = \begin{pmatrix} 6450388100 \\ 5094541350 \\ 602977820 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1^4 \approx 102618.$$

$$\lambda_2^4 \cdot \alpha_2 \mathfrak{x}_2 \approx \mathfrak{x}_2' = \begin{pmatrix} 41{,}75 \\ -55{,}69 \\ 24{,}05 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 \approx 3{,}3836.$$

Man findet hieraus, indem man die Anteile

$$\alpha_1 \mathfrak{x}_1 \approx \frac{\mathfrak{z}_8}{\lambda_1^8} \quad \text{und} \quad \alpha_2 \mathfrak{x}_2 \approx \frac{\mathfrak{x}_2'}{\lambda_2^4}$$

von $\mathfrak{z}_0$ subtrahiert, den der gesuchten Eigenlösung $\mathfrak{x}_3$ annähernd proportionalen Vektor

$$\mathfrak{x}_3' = \mathfrak{z}_0 - \alpha_1 \mathfrak{x}_1 - \alpha_2 \mathfrak{x}_2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}61255 \\ 0{,}48379 \\ 0{,}05726 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}31851 \\ -0{,}42486 \\ 0{,}18348 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}06894 \\ -0{,}05893 \\ -0{,}24074 \end{pmatrix}$$

Aus dem Verhältnis der Vektoren $\mathfrak{x}_3'$ und $A \cdot \mathfrak{x}_3'$ findet man näherungsweise den Eigenwert λ_3 :

$$A \cdot \mathfrak{x}_3' = \begin{pmatrix} 0{,}10010 \\ -0{,}08673 \\ -0{,}35860 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{rcl} 0{,}10010 : 0{,}06894 & = & 1{,}452 \\ -0{,}08673 : 0{,}05893 & = & 1{,}472 \\ -0{,}35860 : 0{,}24074 & = & 1{,}490 \end{array}$$

Mit wesentlich besserer Genauigkeit findet man λ_3 aus dem Verhältnis der Längen der beiden Vektoren $\mathfrak{x}_3'$ und $A \cdot \mathfrak{x}_3'$:

$$\frac{\sqrt{0{,}10010^2 + 0{,}08673^2 + 0{,}35860^2}}{\sqrt{0{,}06894^2 + 0{,}05893^2 + 0{,}24074^2}} = \sqrt{2{,}208119} = 1{,}485974$$

Der genaue Eigenwert beträgt $\lambda_3 = 1{,}485953$.

Bei vier- oder mehrreihigen Matrizen ist jedoch die Anwendung eines solchen Verfahrens für die Berechnung von λ_3 und ξ^3 im allgemeinen nicht zu empfehlen. Man müsste noch eine viel höhere Dezimalstellenzahl berücksichtigen, als das schon für die Berechnung von λ_2 und ξ^2 nötig war, und man würde trotzdem für λ_3 und ξ^3 meistens nur sehr grobe Näherungswerte finden.

Man kann dabei die gleichen Wege benutzen, die auch zur Berechnung von λ_2 und ξ^2 angegeben wurden:

Entweder man berechnet nach dem oben beschriebenen Verfahren die in einem Vektor

$$z_p = A^p \cdot z_0 = \sum_{i=1,\dots,n} \lambda_i^p \alpha_i \xi^i$$

enthaltenen Anteile der ersten und zweiten Eigenlösung und subtrahiert diese von z_p. Der Vektor

$$\xi^{3'} = z_p - \lambda_1^p \alpha_1 \xi^1 - \lambda_2^p \alpha_2 \xi^2 = \sum_{i=3,4,\dots,n} \lambda_i^p \alpha_i \xi^i \qquad (60)$$

ist, falls p so hoch gewählt wurde, dass der Anteil der dritten Eigenlösung $\lambda_3^p \alpha_3 \xi^3$ alle folgenden Eigenlösungen erheblich überragt, annähernd ξ^3 proportional.

Oder man benutzt eine von v.Mises angegebene Näherungsformel, die allerdings für unsymmetrische Matrizen wieder in folgender Weise abgeändert werden muss:

$$\xi^{3''} = \begin{vmatrix} a_{11}^{(2p)} & a_{12}^{(2p)} & a_{13}^{(2p)} \\ a_{21}^{(2p)} & a_{22}^{(2p)} & a_{23}^{(2p)} \\ u_1^{(p)} & u_2^{(p)} & u_3^{(p)} \end{vmatrix} \qquad (61)$$

Hierin können wieder die Elemente $a_{iK}^{(2p)}$ durch die Zeilen und Spalten der Matrix A^p ausgedrückt werden:

$$\xi^{3''} = \begin{vmatrix} b_1^{(p)} u_1^{(p)} & b_1^{(p)} u_2^{(p)} & b_1^{(p)} u_3^{(p)} \\ b_2^{(p)} u_1^{(p)} & b_2^{(p)} u_2^{(p)} & b_2^{(p)} u_3^{(p)} \\ u_1^{(p)} & u_2^{(p)} & u_3^{(p)} \end{vmatrix} \qquad (61')$$

Auch hier kann man die zahlenmässige Berechnung dieses Determinantenausdrucks wesentlich vereinfachen, indem man vor dem Ausmultiplizieren der Produkte $b_i^{(p)} u_K^{(p)}$ Vielfache einzelner Zeilen und Spalten von anderen Zeilen und Spalten der Determinante subtrahiert.

Durch eine solche Umformung des Ausdrucks (61') kann die Berechnung sehr kleiner Differenzen aus sehr grossen Zahlen zwar eingeschränkt, jedoch nicht vermieden werden. Im folgenden Abschnitt wird ein Verfahren gezeigt, das diese rechnerischen Schwierigkeiten vermeidet.

VII. BERECHNUNG DER ELEMENTAR-MATRIZEN EINER MATRIX MIT n VONEINANDER VERSCHIEDENEN EIGENWERTEN.

A. Theoretische Grundlagen.

Es soll ein Verfahren abgeleitet werden, das auch die Berechnung des zweit- und drittgrössten oder eines beliebigen Eigenwertes und der zugehörigen Eigenlösungen ermöglicht, ohne dass dabei, wie im vorigen Abschnitt, durch die Bildung kleiner Differenzen aus sehr grossen Zahlen die erreichbare Genauigkeit begrenzt ist. Zugleich werden einige wichtige Sätze über Matrizen behandelt, die auch zum Verständnis, zur Beurteilung und für die zweckmässige Anwendung einiger früher beschriebenen Verfahren wichtig sind.

Zunächst ist hierfür eine Erweiterung der theoretischen Grundlagen notwendig.

1. Erweiterung des Begriffes der Matrix.

Rechteckige Matrizen; der Vektor als Sonderfall der Matrix.

Bei der Definition der Matrix wurde festgesetzt, dass nur n-reihige quadratische Matrizen betrachtet werden, dass also nur quadratische Matrizen zueinander in irgendeine rechnerische Beziehung gesetzt werden, und zwar nur solche, die untereinander die gleiche Anzahl Zeilen (bzw. Spalten) besitzen.

Es ist aber bekannt, dass man auch jede rechteckige Matrix in eine quadratische Matrix verwandeln kann, indem man die fehlenden Reihen durch Nullen ersetzt. Die Matrix kann dann wie jede andere quadratische Matrix behandelt werden.

Man kann auch noch einen Schritt weitergehen und jede rechteckige oder quadratische Matrix durch Hinzufügen von Nullreihen in eine n-reihige quadratische Matrix verwandeln, wenn unter den verschiedenen Matrizen n die grösste vorkommende Zeilen- oder Spaltenzahl ist. Die Nullreihen mögen stets am rechten bzw. unteren Ende der Matrix angefügt werden.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ein Vektor n-ter Ordnung kann als Matrix behandelt werden, indem

man noch (n-1) Nullreihen (Spalten) anfügt:

$$\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&0&0\\1&0&0\\3&0&0\end{pmatrix}$$

Auch eine skalare Grösse kann als eine einreihige Matrix betrachtet und durch Hinzufügen von Nullreihen zu einer n-reihigen Matrix ergänzt werden; z.B. n = 3:

$$a = \begin{pmatrix}a&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \qquad (62)$$

Diese Darstellungsart ist allerdings unzulässig, wenn eine Matrix mit einem Skalar multipliziert werden soll; in diesem Fall muss zwischen dem skalaren Faktor a und der erweiterten einreihigen Matrix (62) unterschieden werden.

Produktbildungen aus Vektoren.

Um das Multiplikationsgesetz der quadratischen Matrizen auch auf Vektoren anwenden zu können, muss unterschieden werden zwischen senkrecht und waagerecht angeordneten Vektoren.

Die n Komponenten eines Vektors, z.B. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ können entweder, wie die Elemente einer Spalte, untereinander geschrieben werden:

$$\mathfrak{x}^{|} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1&0&\ldots.&0\\x_2&0&\ldots.&0\\&&&\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\&&&\\x_n&0&\ldots.&0\end{pmatrix}$$

oder in einer Zeile nebeneinander:

$$\overline{\mathfrak{x}} = (x_1 \quad x_2 \ldots. x_n) = \begin{pmatrix}x_1&x_2&\ldots&x_n\\0&0&\ldots&0\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\0&0&\ldots&0\end{pmatrix}$$

$\mathfrak{x}^{|}$ wird als Spaltenvektor, $\overline{\mathfrak{x}}$ als Zeilenvektor bezeichnet. Die bisher benutzte Darstellung der Vektoren in Spaltenform wird auch im folgenden im allgemeinen beibehalten; wo eine besondere Kennzeichnung fehlt, bezeichnet $\mathfrak{x}$ stets einen Spaltenvektor. Nur wo Zweifel möglich sind, werden Spalten- und Zeilenvektoren

durch einen senkrechten bzw. waagerechten Strich ($\vec{a}|$, $\overline{\vec{a}}$)
gekennzeichnet.

Zwischen zwei Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_n \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$$

sind zwei verschiedene Produktbildungen möglich:

1) Das skalare Produkt

$$\overline{\vec{a}} \cdot \vec{b}| = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ b_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum a_i \cdot b_i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \sum a_i \, b_i = a_1 \, b_1 + a_2 \, b_2 + \dots + a_n \, b_n \, .$$

Soweit im folgenden bei Produktbildungen aus zwei Vektoren nichts Besonderes vermerkt ist, ist unter $\vec{a} \, . \, \vec{b}$ stets das skalare Produkt zu verstehen.

2) Das Matrizen-Produkt

$$\vec{a}| \cdot \overline{\vec{b}} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ a_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \cdot b_1 & a_1 \cdot b_2 & \dots & a_1 \cdot b_n \\ a_2 \cdot b_1 & a_2 \cdot b_2 & \dots & a_2 \cdot b_n \\ . & . & . & . \\ a_n \cdot b_1 & a_n \cdot b_2 & \dots & a_n \cdot b_n \end{pmatrix}$$

Man erhält also in diesem Fall eine Matrix vom Rang 1, d.h. eine Matrix, deren sämtliche Zeilen (bzw.Spalten) als Vielfache einer Zeile (bzw.Spalte) dargestellt werden können.

Anmerkung: Es gibt auch noch die Möglichkeit der Produktbildung $\vec{a}| \cdot \vec{b}|$ oder $\overline{\vec{a}} \cdot \overline{\vec{b}}$; diese haben aber beide als Vektor-Produkte keine Bedeutung. Es ist nämlich

$$\vec{a}| \cdot \vec{b}| = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ a_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ b_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \cdot b_1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 \cdot b_1 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ a_n \cdot b_1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = b_1 \cdot \vec{a}| \, .$$

Das Produkt $\vec{a}| \cdot \vec{b}|$ ergibt also ein Vielfaches des Vektors $\vec{a}|$, in dem nur eine Komponente des Vektors $\vec{b}$ als Faktor erscheint. Ebenso ist $\overline{\vec{a}} \cdot \overline{\vec{b}} = a_1 \, . \, \overline{\vec{b}}$.

Produktbildungen aus Vektoren und Matrizen.

Das Produkt aus einer Matrix und einem Spaltenvektor gibt, wenn die Matrix vor dem Vektor steht, wieder einen Spaltenvektor:

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} = \begin{pmatrix} \sum a_{1i} x_i \\ \sum a_{2i} x_i \\ \cdots \\ \sum a_{ni} x_i \end{pmatrix}$$

Das Produkt aus einem Zeilenvektor und einer Matrix gibt, wenn die Matrix hinter dem Vektor steht, wieder einen Zeilenvektor:

$$\mathfrak{y} \cdot \mathfrak{A} = (\sum y_i a_{i1} \quad \sum y_i a_{i2} \quad \cdots \quad \sum y_i a_{in})$$

Anmerkung: Die Produktbildungen $\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{y}$ sind für die folgenden Betrachtungen ohne Bedeutung; man erhält in diesen beiden Fällen eine Matrix vom Rang 1, an deren Bildung nur die erste Zeile bzw. Spalte der Matrix $\mathfrak{A}$ beteiligt ist.

Darstellung einer Matrix durch ihre Spalten oder Zeilen.

Die Spalten einer Matrix $\mathfrak{A}$ können als Vektoren betrachtet werden:

$$\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} = \mathfrak{a}_i$$

Für die Matrix selbst kann man folgende abgekürzte Schreibweise benutzen, indem man die Elemente jeder einzelnen Spalte zu einem Spaltenvektor zusammenfasst und diese Vektoren in einer Zeile aneinander-reiht:

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = (\mathfrak{a}_1 \; \mathfrak{a}_2 \cdots \mathfrak{a}_n).$$

Ebenso kann man die Zeilen der Matrix als Vektoren behandeln:

$$(a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}) = \overline{\mathfrak{a}_i'} .$$

Die Matrix wird dann dargestellt, indem man diese n Zeilenvektoren in einer Spalte untereinander anordnet:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \overline{a_1'} \\ \overline{a_2'} \\ \vdots \\ \overline{a_n'} \end{pmatrix}.$$

Verschiedene Darstellungsarten für das Produkt aus zwei Matrizen.

Das Produkt aus 2 Matrizen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ kann in verschiedener Weise durch Spalten- und Zeilenvektoren dargestellt werden:

1) In der vorderen Matrix werden die Zeilen, in der hinteren die Spalten als Vektoren betrachtet:

$$\mathcal{A}\cdot\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \overline{a_1'} \\ \overline{a_2'} \\ \vdots \\ \overline{a_n'} \end{pmatrix} \cdot \left(\overline{b_1} \mid \overline{b_2} \mid \dots \mid \overline{b_n}\right) = \begin{pmatrix} a_1' b_1 & a_1' b_2 & \dots & a_1' b_n \\ a_2' b_1 & a_2' b_2 & \dots & a_2' b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n' b_1 & a_n' b_2 & \dots & a_n' b_n \end{pmatrix} \tag{63}$$

Dieser Ausdruck ist gleichbedeutend mit der üblichen Definition des Produktes aus 2 Matrizen: Das Element der i-ten Zeile und der k-ten Spalte ist gleich dem skalaren Produkt aus der i-ten Zeile der vorderen und der k-ten Spalte der hinteren Matrix.

2) In der vorderen Matrix werden die Spalten, in der hinteren die Zeilen als Vektoren betrachtet:

$$\mathcal{A}\cdot\mathcal{B} = \left(\overline{a_1} \mid \overline{a_2} \mid \dots \mid \overline{a_n}\right) \cdot \begin{pmatrix} \overline{b_1'} \\ \overline{b_2'} \\ \vdots \\ \overline{b_n'} \end{pmatrix} = \overline{a_1} \cdot \overline{b_1'} + \overline{a_2} \cdot \overline{b_2'} + \dots + \overline{a_n} \cdot \overline{b_n'}. \tag{64}$$

Die Produktmatrix ist also gleich der Summe der n Matrizen von Rang 1, die man als Matrizenprodukte aus der i-ten Spalte von $\mathcal{A}$ und der i-ten Zeile von $\mathcal{B}$ erhält (i=1,2, ... ,n).

2) Eigenspalten und Eigenzeilen einer Matrix.

Transponierte Matrix.

Mit $\mathfrak{A}^*$ wird die "transponierte Matrix" bezeichnet, die man aus $\mathfrak{A}$ erhält, indem man sämtliche Elemente a_{ik} $(i \neq k)$ mit dem entsprechenden Element a_{ki} vertauscht:

$$a_{ik}^* = a_{ki}$$

Für die Transponierte des Produkts aus 2 Matrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{Z}$ gilt

$$(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{Z})^* = \mathfrak{Z}^* \cdot \mathfrak{A}^* \tag{65}$$

Anwendung auf Vektoren.

Die Transponierte eines Spaltenvektors $\mathfrak{z}|$ ist der entsprechende Zeilenvektor $\overline{\mathfrak{z}}$ und umgekehrt:

$$(\overline{\mathfrak{z}})^* = \mathfrak{z}| \quad ; \quad (\mathfrak{z}|)^* = \overline{\mathfrak{z}} .$$

Die Transponierte des Matrizenprodukts aus 2 Vektoren $\mathfrak{w}|$ und $\overline{\mathfrak{v}}$ ist das Matrizenprodukt aus $\mathfrak{v}|$ und $\overline{\mathfrak{w}}$:

$$(\mathfrak{w}| \cdot \overline{\mathfrak{v}})^* = (\mathfrak{v}| \cdot \overline{\mathfrak{w}}) .$$

Die Transponierte des Produkts aus einer Matrix $\mathfrak{A}$ und einem Spaltenvektor $\mathfrak{z}|$ ist gleich dem Produkt aus dem entsprechenden Zeilenvektor $\overline{\mathfrak{z}}$ und der transponierten Matrix $\mathfrak{A}^*$:

$$(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{z}|)^* = (\mathfrak{z}|)^* \cdot \mathfrak{A}^* = \overline{\mathfrak{z}} \cdot \mathfrak{A}^* . \tag{66}$$

Eigenspalten der Matrix $\mathfrak{A}$.

Die Eigenlösungen $\mathfrak{z}_i$ $(i=1,2, \ldots, n)$, die für den entsprechenden Eigenwert λ_i die Gleichung $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{z}_i = \lambda_i \cdot \mathfrak{z}_i$ erfüllen, sind Spaltenvektoren; sie sollen im folgenden kurz als die "Eigenspalten" der Matrix $\mathfrak{A}$ bezeichnet werden. Die Eigenspalten können in irgendeiner Reihenfolge (z.B. nach der Grösse der zugehörigen Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ geordnet) zu einer n-reihigen Matrix zusammengestellt werden:

$$\mathfrak{X} = (\mathfrak{z}^1 \ \mathfrak{z}^2 \cdots \mathfrak{z}^n) .$$

Multipliziert man diese"Matrix der Eigenspalten" mit $\mathfrak{A}$, so bleiben die einzelnen Spalten sich selbst proportional; sie ändern lediglich ihre Grösse, und zwar im Verhältnis der betreffenden Eigenwerte

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{X} = (\lambda_1 \mathfrak{z}^1 \ \lambda_2 \mathfrak{z}^2 \cdots \lambda_n \mathfrak{z}^n) .$$

Eigenzeilen.

Die transponierte Matrix $\mathfrak{A}^*$ besitzt die gleichen Eigenwerte wie $\mathfrak{A}$ (Der Wert der Säkulardeterminante wird durch das Vertauschen der Zeilen und Spalten nicht geändert.) Wenn alle Eigenwerte voneinander verschieden sind, so entspricht jedem Eigenwert λ_i auch eine Eigenlösung der transponierten Matrix $\mathfrak{A}^*$:

$$\mathfrak{A}^* \cdot \mathfrak{y}_i = \lambda_i \cdot \mathfrak{y}_i \ .$$

Diese Gleichung bleibt gültig, wenn man auf beiden Seiten transponiert. Die Transponierte von $\mathfrak{A}^*$ ist die Matrix $\mathfrak{A}$, die Transponierte des Spaltenvektors $\mathfrak{y}_i|$ ist der Zeilenvektor $(\mathfrak{y}_i|)^* = \overline{\mathfrak{y}_i}$. Nach Gleichung (66) erhält man

$$(\mathfrak{A}' \cdot \mathfrak{y}_i|)^* = \overline{\mathfrak{y}_i} \cdot \mathfrak{A} = \lambda_i \cdot \overline{\mathfrak{y}_i}$$

Diese Zeilenvektoren, die die Gleichung

$$\overline{\mathfrak{y}_i} \cdot \mathfrak{A} = \lambda_i \cdot \overline{\mathfrak{y}_i}$$

erfüllen, heissen "Eigenzeilen" der Matrix $\mathfrak{A}$. Jedem der n voneinander verschiedenen Eigenwerte λ_i entspricht eine solche Eigenzeile $\overline{\mathfrak{y}_i}$.

Die n Eigenzeilen können, untereinander angeordnet, ebenfalls zu einer Matrix zusammengefasst werden:

$$\mathfrak{y} = \begin{pmatrix} \overline{\mathfrak{y}_1} \\ \overline{\mathfrak{y}_2} \\ \vdots \\ \overline{\mathfrak{y}_n} \end{pmatrix}$$

und zwar werden hierfür folgende, stets erfüllbare Vorschriften festgesetzt:

1.) Die Reihenfolge $\overline{\mathfrak{y}_1}$, $\overline{\mathfrak{y}_2}$, ..., $\overline{\mathfrak{y}_n}$ sei dieselbe wie diejenige der Vektoren $\mathfrak{x}_1|$, $\mathfrak{x}_2|$, ..., $\mathfrak{x}_n|$ (entsprechend einer bestimmten Reihenfolge der n Eigenwerte λ_1 , λ_2 , ..., λ_n)

2.) Die Grösse der Vektoren $\mathfrak{y}_i$ soll so festgelegt sein, dass das skalare Produkt der Vektoren $\mathfrak{y}_i$ und $\mathfrak{x}_i$ stets den Wert 1 ergibt:

$$\overline{\mathfrak{y}_i} \cdot \mathfrak{x}_i| = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \ . \tag{67}$$

3. Die Darstellung der Matrix $\mathfrak{A}$ durch ihre Elementar-Matrizen.

In den folgenden Betrachtungen wird wieder vorausgesetzt, dass alle Eigenwerte der Matrix $\mathfrak{A}$ voneinander verschieden sind.

Produktbildungen aus Eigenzeilen und Eigenspalten.

Es soll zunächst nachgewiesen werden, dass das skalare Produkt aus einer beliebigen Eigenzeile $\overline{\eta_i}$ und einer zu einem anderen Eigenwert gehörigen Eigenspalte $\mathfrak{x}_k|$ stets den Wert Null ergibt.

Betrachtet man den Ausdruck

$$\overline{\eta_i} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}_k| \ ,$$

so ist einerseits

$$\overline{\eta_i} \cdot \mathfrak{A} = \lambda_i \cdot \overline{\eta_i} \ , \text{ also } \quad \overline{\eta_i} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}_k| = \lambda_i \, \overline{\eta_i} \, \mathfrak{x}_k| \ ,$$

und andererseits

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}_k| = \lambda_k \cdot \mathfrak{x}_k| \ , \text{ also } \quad \overline{\eta_i} \cdot \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x}_k| = \lambda_k \, \overline{\eta_i} \, \mathfrak{x}_k|$$

Hieraus folgt

$$(\lambda_i - \lambda_k) \, \overline{\eta_i} \, \mathfrak{x}_k| = 0 .$$

Wenn, wie vorausgesetzt wurde, $\lambda_i \neq \lambda_k$, so folgt also für beliebige i, k (i≠k)

$$\overline{\eta_i} \, \mathfrak{x}_k| = 0 . \qquad (68)$$

Es lässt sich nun auch leicht zeigen, dass das skalare Produkt $\eta_i \, \mathfrak{x}_i$ von Null verschieden sein muss, dass also die Festsetzung $\eta_i \, \mathfrak{x}_i = 1$ stets zulässig ist. Da nämlich η_i mindestens eine von Null verschiedene Komponente besitzt, so kann man stets einen Vektor $\mathfrak{z}$ angeben, dessen skalares Produkt mit η_i von Null verschieden ist. Dieser Vektor $\mathfrak{z}$ kann als lineare Zusammensetzung der n Eigenspalten $\mathfrak{x}^1$, $\mathfrak{x}^2$, ... , $\mathfrak{x}^n$ dargestellt werden; folglich ist

$$\eta_i \cdot \mathfrak{z} = \eta_i \cdot (\alpha_1 \mathfrak{x}^1 + \alpha_2 \mathfrak{x}^2 + \cdots + \alpha_n \mathfrak{x}^n) = \sum_{k=1,2,\ldots,n} \alpha_k \, \eta_i \, \mathfrak{x}^k = \alpha_i \, \eta_i \, \mathfrak{x}^i \ ,$$

da nach Gleichung (68) alle Glieder mit k ≠ i verschwinden.

Da $\eta_i \cdot \zeta \neq 0$, muss also auch

$$\eta_i \cdot \xi_i = \frac{1}{\alpha_i} \cdot \eta_i \zeta$$

von Null verschieden sein.

Ferner erkennt man aus den Gleichungen (63), (67) und (68), dass das Produkt der beiden Matrizen

$$\mathfrak{y} = \begin{pmatrix} \overline{\eta_1} \\ \overline{\eta_2} \\ \vdots \\ \overline{\eta_n} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{X} = (\xi^1 | \; \xi^2 | \cdots \xi^n |)$$

die Einheitsmatrix ergibt; denn in der Hauptdiagonale der Produktmatrix stehen die Elemente $\overline{\eta_i} \cdot \xi^i | = 1$ und sämtliche übrigen Elemente haben nach Gleichung (68) für $i \neq k$ den Wert $\overline{\eta_i} \cdot \xi^k | = 0$. Es ist also

$$\mathfrak{y} \cdot \mathfrak{X} = \mathfrak{E} . \qquad (69)$$

Elementar-Matrizen.

Aus der Gleichung $\mathfrak{y} \cdot \mathfrak{X} = \mathfrak{E}$ erfolgt nach Gleichung (34), dass auch

$$\mathfrak{X} \cdot \mathfrak{y} = \mathfrak{E} .$$

Auf diese Gleichung kann man die in Gleichung (64) angegebene Darstellungsart anwenden und erhält

$$\mathfrak{X} \cdot \mathfrak{y} = (\xi^1 | \; \xi^2 | \cdots \xi^n |) \cdot \begin{pmatrix} \overline{\eta_1} \\ \overline{\eta_2} \\ \vdots \\ \overline{\eta_n} \end{pmatrix} = \xi^1 | \cdot \overline{\eta_1} + \xi^2 | \cdot \overline{\eta_2} + \cdots + \xi^n | \cdot \overline{\eta_n} . \qquad (70)$$

Die einzelnen Glieder $\xi^i | \cdot \overline{\eta_i}$ sind Matrizen vom Rang 1 und heissen "Elementar-Matrizen der Matrix $\mathfrak{A}$". Sie werden im folgenden mit $\mathfrak{A}_{0i}$ bezeichnet.

Beispiel:

Gegeben sei die Matrix

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & -2 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ihre Eigenwerte sind $\lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 2;$
ie entsprechenden Eigenlösungen (Eigenspalten) sind:

$$\mathfrak{k}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{k}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{k}^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

nd die Eigenzeilen:

$$\begin{aligned} \overline{\eta_1} &= (1, \quad 1, \quad -1) \\ \overline{\eta_2} &= (1, \quad -2, \quad 1) \\ \overline{\eta_3} &= (-1, \quad 1, \quad 0) \end{aligned}$$

s ist also

$$\mathfrak{K} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

an kann leicht nachrechnen, dass die Gleichungen $\mathfrak{y} \cdot \mathfrak{K} = \mathfrak{E}$
nd $\mathfrak{K} \cdot \mathfrak{y} = \mathfrak{E}$ erfüllt sind.

Die Elementarmatrizen der Matrix $\mathfrak{A}$ sind dann

$$\mathfrak{A}_{o_1} = \mathfrak{k}^1 | \cdot \overline{\eta_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A}_{o_2} = \mathfrak{k}^2 | \cdot \overline{\eta_2} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{A}_{o_3} = \mathfrak{k}^3 | \cdot \overline{\eta_3} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

ieses Beispiel möge zur Veranschaulichung der folgenden Sätze
ienen.

ie grundlegenden Sätze über Elementarmatrizen.

Für die n Elementarmatrizen einer bestimmten Matrix $\mathfrak{A}$
elten folgende grundlegende Sätze:

1) Das Produkt aus 2 verschiedenen Elementarmatrizen $\mathfrak{A}_{oi}$
nd $\mathfrak{A}_{ok}$ verschwindet; d.h. in der Produktmatrix $\mathfrak{A}_{oi} \cdot \mathfrak{A}_{ok}$ sind,
enn $i \neq k$, sämtliche Elemente = 0.

Beweis:

Es ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_{oi} \cdot \mathfrak{A}_{ok} &= (\mathfrak{k}^i | \cdot \overline{\eta_i}) \cdot (\mathfrak{k}^k | \cdot \overline{\eta_k}) = \\ &= \mathfrak{k}^i | \cdot (\overline{\eta_i} \cdot \mathfrak{k}^k |) \cdot \overline{\eta_k} = \mathfrak{k}^i | \cdot 0 \cdot \overline{\eta_k} = 0 \end{aligned} \tag{71}$$

2) Jede Elementarmatrix bleibt, wenn man sie mit sich selbst
multipliziert, unverändert:

$$\mathfrak{A}_{oi}^2 = \mathfrak{A}_{oi} \cdot \mathfrak{A}_{oi} = \mathfrak{A}_{oi}. \tag{72}$$

Beweis:

Es ist

$$\mathfrak{A}_{oi} \cdot \mathfrak{A}_{oi} = (\xi_i| \cdot \overline{\eta_i}) \cdot (\xi_i| \cdot \overline{\eta_i}) =$$
$$= \xi_i| \cdot (\overline{\eta_i} \cdot \xi_i|) \cdot \overline{\eta_i} = \xi_i| \cdot 1 \cdot \overline{\eta_i} = \xi_i| \cdot \overline{\eta_i} = \mathfrak{A}_{oi}$$

Anmerkung: Es ist in diesem Fall gleichgültig, ob man das skalare Produkt $\overline{\eta_i}\,\xi_i| = 1$ als Skalar oder als einreihige Matrix betrachtet; denn es ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \cdot \overline{\eta_i} = 1 \cdot \overline{\eta_i} = \overline{\eta_i}, \quad \xi_i| \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = \xi_i| \cdot 1 = \xi_i| .$$

3) In jeder Elementarmatrix ist die Diagonalsumme (das ist die Summe der in der Hauptdiagonale stehenden Elemente) = 1.

Beweis:

Die Diagonalelemente der Matrix $\mathfrak{A}_{oi} = \xi_i| \cdot \overline{\eta_i}$ sind die Produkte aus den einander entsprechenden Komponenten von ξ_i und η_i ; ihre Summe ist daher gleich dem skalaren Produkt dieser beiden Vektoren, also = $\overline{\eta_i} \cdot \xi_i| = 1$.

4) Die Summe der n Elementarmatrizen ergibt die Einheitsmatrix

$$\mathfrak{A}_{o_1} + \mathfrak{A}_{o_2} + \dots\dots + \mathfrak{A}_{on} = \mathfrak{E} . \qquad (73)$$

Dieser Satz ergibt sich unmittelbar aus der Definition der Elementarmatrizen (vergl. Gleichung 69 und 70).

Die Matrix $\mathfrak{A}$ als Vielfachsumme ihrer Elementarmatrizen.

Das Produkt aus der Matrix $\mathfrak{A}$ und einer ihrer Elementarmatrizen $\mathfrak{A}_{oi}$ ergibt das λ_i -fache der betreffenden Elementarmatrix

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}_{oi} = \lambda_i \cdot \mathfrak{A}_{oi} . \qquad (74)$$

Da nämlich sämtliche Spalten von $\mathfrak{A}_{oi}$ der Eigenlösung ξ_i proportional sind, so bleibt bei der Multiplikation mit $\mathfrak{A}$ jede Spalte sich selbst proportional und ändert ihre Grösse im Verhältnis des Eigenwertes λ_i .

Hieraus ergibt sich folgender wichtige Satz:

Die Matrix $\mathcal{A}$ ist selbst eine Summe aus Vielfachen ihrer Elementarmatrizen, und zwar ist

$$\mathcal{A} = \lambda_1 \cdot \mathcal{A}_{o1} + \lambda_2 \cdot \mathcal{A}_{o2} + \cdots + \lambda_n \cdot \mathcal{A}_{on} . \qquad (75)$$

Beweis:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{E} = \mathcal{A} \cdot (\mathcal{A}_{o1} + \mathcal{A}_{o2} + \cdots + \mathcal{A}_{on}) =$$
$$= \lambda_1 \cdot \mathcal{A}_{o1} + \lambda_2 \cdot \mathcal{A}_{o2} + \cdots + \lambda_n \cdot \mathcal{A}_{on} .$$

Auch dieser Satz kann am obigen Zahlenbeispiel leicht nachgeprüft werden. Es ist

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & -2 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \mathcal{A}.$$

Auch die Umkehrung dieses Satzes ist gültig:
Bildet man aus den n Elementarmatrizen $\mathcal{A}_{oi}$ (i=1, 2, ...,n), die sämtlich den Bedingungen

$$\mathcal{A}_{oi} \cdot \mathcal{A}_{oK} = 0 \qquad (i, K = 1, 2, \ldots, n \; ; \; i \neq K)$$
$$\mathcal{A}_{oi}^{\,2} = \mathcal{A}_{oi} \neq 0$$
$$\sum_{i=1,2,\ldots,n} \mathcal{A}_{oi} = \mathcal{E} \qquad *)$$

genügen, durch lineare Zusammensetzung eine beliebige Matrix

$$\mathcal{Z} = \beta_1 \mathcal{A}_{o1} + \beta_2 \mathcal{A}_{o2} + \cdots + \beta_n \cdot \mathcal{A}_{on}$$

so hat diese Matrix $\mathcal{Z}$ die Eigenwerte

$$\beta_1 , \beta_2 , \ldots , \beta_n .$$

Beweis:

Die Gleichung

$$(\mathcal{Z} - \lambda \mathcal{E}) \cdot \mathfrak{e} = 0$$

ist erfüllt, wenn λ gleich einem der Koeffizienten β_i , und $\mathfrak{e}$ eine Spalte der betreffenden Elementarmatrix $\mathcal{A}_{oi}$ ist:

$$(\mathcal{Z} - \beta_i \mathcal{E}) \cdot \mathcal{A}_{oi} = \sum_{K=1,2,\ldots,n} (\beta_K - \beta_i) \mathcal{A}_{oK} \cdot \mathcal{A}_{oi} =$$
$$= \sum_{K \neq i} (\beta_K - \beta_i) \mathcal{A}_{oK} \cdot \mathcal{A}_{oi} + (\beta_i - \beta_i) \cdot \mathcal{A}_{oi} \cdot \mathcal{A}_{oi} = 0 ,$$

da $\mathcal{A}_{oK} \cdot \mathcal{A}_{oi}$ für k ≠ i verschwindet.

---

*) Die dritte Bedingung folgt auch bereits aus den beiden ersten.

Potenzen und rationale Funktionen der Matrix.

Ebenso wie die Matrix $\mathcal{A}$ können auch ihre sämtlichen rationalen Potenzen als Vielfachsummen der Elementarmatrizen dargestellt werden. Multipliziert man z.B. die Matrix $\mathcal{A}$ mit sich selbst, so erhält man unter Berücksichtigung der Gleichungen (75), (71) und (72):

$$\mathcal{A}^2 = \left(\sum \lambda_i \cdot \mathcal{A}_{oi}\right)^2 = \sum \lambda_i^2 \cdot \mathcal{A}_{oi} \quad ,$$

und allgemein für die p-te Potenz der Matrix

$$\mathcal{A}^p = \mathcal{A}^p \cdot \sum \mathcal{A}_{oi} = \sum \lambda_i^p \cdot \mathcal{A}_{oi} \quad . \qquad (76)$$

In gleicher Weise können alle ganzen, sowie auch alle gebrochenen rationalen Funktionen der Matrix $\mathcal{A}$ als Vielfachsummen der n Elementarmatrizen $\mathcal{A}_{o1}, \mathcal{A}_{o2}, \ldots, \mathcal{A}_{on}$ dargestellt werden; und zwar gilt für eine beliebige rationale Funktion f(x) die Identität:

$$f(\mathcal{A}) \equiv \sum_{i=1,2,\ldots,n} f(\lambda_i) \cdot \mathcal{A}_{oi} \qquad (77)$$

Die Eigenwerte der Matrix $f(\mathcal{A})$ sind also mit den entsprechenden Funktionswerten $f(\lambda_i)$ identisch.

Der Beweis für diesen Satz folgt für ganze rationale Funktionen (Polynome) unmittelbar aus Gleichung (76).

Für gebrochene rationale Funktionen mit dem Zähler 1

$$f(x) = \frac{1}{g(x)} \quad , \quad f(\mathcal{A}) = [g(\mathcal{A})]^{-1} = g^{-1}(\mathcal{A})$$

erfüllt der Ausdruck

$$\sum f(\lambda_i) \cdot \mathcal{A}_{oi}$$

die Bedingung

$$\left(\sum f(\lambda_i) \cdot \mathcal{A}_{oi}\right) \cdot g(\mathcal{A}) = \sum \frac{1}{g(\lambda_i)} \mathcal{A}_{oi} \cdot \sum g(\lambda_i) \cdot \mathcal{A}_{oi}$$

$$= \sum \frac{1}{g(\lambda_i)} \cdot g(\lambda_i) \cdot \mathcal{A}_{oi} = \sum \mathcal{A}_{oi} = \mathcal{E} \cdot$$

$\sum f(\lambda_i) \cdot \mathcal{A}_{oi}$ ist also die zu $g(\mathcal{A})$ reziproke Matrix, ist also gleich $f(\mathcal{A})$.

Beliebige gebrochene rationale Funktionen können als Quotient zweier ganzer rationaler Funktionen dargestellt werden

$$f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$$

In diesem Fall ist

$$f(\mathcal{A}) = h(\mathcal{A}) \cdot g^{-1}(\mathcal{A}) =$$

$$= \sum h(\lambda_i) \cdot \mathcal{A}_{oi} \cdot \sum \frac{1}{g(\lambda_i)} \cdot \mathcal{A}_{oi} = \sum \frac{h(\lambda_i)}{g(\lambda_i)} \cdot \mathcal{A}_{oi} = \sum f(\lambda_i) \cdot \mathcal{A}_{oi}$$

Anmerkung: Ein Sonderfall liegt vor, wenn der Nennerausdruck g(x) für einen der n Eigenwerte der Matrix $\mathfrak{A}$, z.B. für λ_1 verschwindet:

$$g(\lambda_1) = 0$$

In diesem Fall wird in dem Ausdruck

$$g^{-1}(\mathfrak{A}) = \sum \frac{1}{g(\lambda_i)} \cdot \mathfrak{A}_{oi}$$

der Anteil der betreffenden Elementarmatrix $\frac{1}{g(\lambda_1)} \cdot \mathfrak{A}_{o1}$ unendlich gross, während die übrigen Elementarmatrizen nur in endlicher Grösse vorkommen und daher gegenüber dem Anteil von $\mathfrak{A}_{o1}$ verschwinden. Die der reziproken Matrix proportionale "adjungierte Matrix" *) ist in diesem Fall der betreffenden Elementarmatrix $\mathfrak{A}_{o1}$ proportional.

Falls g(x) für zwei Eigenwerte, z.B. für λ_1 und λ_2 verschwindet, so enthält der Ausdruck

$$g^{-1}(\mathfrak{A}) = \frac{1}{g(\lambda_1)} \cdot \mathfrak{A}_{o1} + \frac{1}{g(\lambda_2)} \cdot \mathfrak{A}_{o2} + \cdots\cdots$$

unendlich grosse Anteile der beiden Elementarmatrizen $\mathfrak{A}_{o1}$ und $\mathfrak{A}_{o2}$, und zwar in einem unbestimmten Verhältnis.

Bekanntlich ist in jeder Matrix die Summe der Diagonalelemente gleich der Summe ihrer Eigenwerte **):

$$\sum_{i=1,2,\ldots,n} a_{ii} = \sum_{i=1,2,\ldots,n} \lambda_i$$

Die Matrix $\mathfrak{A}^p$ hat nach Gleichung (76) die Eigenwerte $\lambda_i^{\,p}$ (i=1, 2, ..., n). Die Summe der Diagonalelemente der Matrix ist also

$$\sum_{i=1,2,\ldots,n} a_{ii}^{(p)} = \sum_{i=1,2,\ldots,n} \lambda_i^{\,p} . \qquad (78)$$

Für eine beliebige rationale Funktion f(x) ist die Diagonalsumme der Matrix $f(\mathfrak{A})$ nach Gleichung (77) gleich

$$\sum_{i=1,2,\ldots,n} f(\lambda_i) .$$

---

*) Vgl. z.B. Bocher - Beck, l. c., Seite 83.

**) Vgl. Gleichung (7), Seite 15.

Die Elementarmatrizen als Polynome der Matrix $\mathfrak{A}$.

Umgekehrt kann auch jede Elementarmatrix der Matrix $\mathfrak{A}$ als ein Polynom der Matrix $\mathfrak{A}$ dargestellt werden. Berechnet man z.B. das Produkt

$$(\mathfrak{A}-\lambda_2\mathfrak{E})\cdot(\mathfrak{A}-\lambda_3\mathfrak{E})\cdot\ldots\cdot(\mathfrak{A}-\lambda_n\mathfrak{E})$$

über sämtliche $(\mathfrak{A}-\lambda_i\mathfrak{E})$ mit Ausnahme von i = 1, so erhält man, wenn man die einzelnen Faktoren durch Elementarmatrizen darstellt, also die Matrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{E}$ durch die Ausdrücke

$$\mathfrak{A}=\sum\lambda_i\mathfrak{A}_{0i}\quad,\qquad \mathfrak{E}=\sum\mathfrak{A}_{0i}$$

ersetzt:

$$\Big(\sum_{i=1,\ldots,n}(\lambda_i-\lambda_2)\mathfrak{A}_{0i}\Big)\cdot\Big(\sum_{i=1,\ldots,n}(\lambda_i-\lambda_3)\mathfrak{A}_{0i}\Big)\cdot\ldots\cdot\Big(\sum_{i=1,\ldots,n}(\lambda_i-\lambda_n)\mathfrak{A}_{0i}\Big)=$$

$$=\sum_{i=1,\ldots,n}(\lambda_i-\lambda_2)\cdot(\lambda_i-\lambda_3)\cdot\ldots\cdot(\lambda_i-\lambda_n)\cdot\mathfrak{A}_{0i}$$

In dieser Summe enthalten sämtliche Glieder mit Ausnahme von i = 1 den Faktor $(\lambda_i-\lambda_i)=0$; das einzige nicht verschwindende Glied ist

$$(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)\ldots(\lambda_1-\lambda_n)\cdot\mathfrak{A}_{01}$$

Dividiert man noch durch diese Faktoren $(\lambda_1-\lambda_i)$ (i=2, 3, . . . , n), so erhält man die Elementarmatrix $\mathfrak{A}_{01}$ als ganzerationale Funktion von $\mathfrak{A}$. Allgemein gilt für die Elementarmatrix $\mathfrak{A}_{0i}$:

$$\mathfrak{A}_{0i}=\frac{\prod_{(k\neq i)}(\mathfrak{A}-\lambda_k\mathfrak{E})}{\prod_{(k\neq i)}(\lambda_i-\lambda_k)}\quad,\qquad(79)$$

wobei die beiden Produkte über sämtliche k = 1, 2, . . . , n mit Ausnahme von k = i zu nehmen sind.

B. Praktische Anwendungen.

Es soll nun gezeigt werden, wie man in vielen Fällen durch Ermittlung einzelner Elementarmatrizen in verhältnismässig bequemer und einfacher Weise Eigenwerte und Eigenlösungen einer Matrix bestimmen kann.

Es wird auch hier zunächst vorausgesetzt, dass sämtliche n Eigenwerte der Matrix $\mathcal{A}$ voneinander verschieden sind.

1. Bestimmung der ersten Elementarmatrix.

Die Elementarmatrix $\mathcal{A}_{01}$, die dem grössten Eigenwert λ_1 entspricht, findet man durch Potenzieren (wiederholtes Quadrieren) der Matrix $\mathcal{A}$. Für die p-te Potenz der Matrix $\mathcal{A}$ gilt

$$\mathcal{A}^p = \lambda_1^p \cdot \mathcal{A}_{01} + \lambda_2^p \cdot \mathcal{A}_{02} + \ldots + \lambda_n^p \cdot \mathcal{A}_{0n}.$$

Mit wachsendem p wird in diesem Ausdruck der Anteil der Elementarmatrix $\mathcal{A}_{01}$ immer stärker gegenüber allen übrigen Elementarmatrizen hervortreten.

Dividiert man die Matrix $\mathcal{A}^p$ durch ihre Diagonalsumme $\sum_{i=1,2,\ldots,n} a_{ii}^{(p)}$, so erhält man unter Berücksichtigung von Gleichung (76) und (78) den Ausdruck

$$\frac{1}{\sum a_{ii}^{(p)}} \cdot \mathcal{A}^p = \frac{\mathcal{A}^p}{\sum \lambda_i^p} = \frac{\lambda_1^p \cdot \mathcal{A}_{01} + \lambda_2^p \cdot \mathcal{A}_{02} + \ldots + \lambda_n^p \cdot \mathcal{A}_{0n}}{\lambda_1^p + \lambda_2^p + \ldots + \lambda_n^p}$$

$$= \frac{\mathcal{A}_{01} + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^p \cdot \mathcal{A}_{02} + \ldots + \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^p \cdot \mathcal{A}_{0n}}{1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^p + \ldots + \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^p} \qquad (80)$$

Da λ_1 voraussetzungsgemäss dem Betrage nach grösser ist als alle übrigen Eigenwerte, werden bei genügend hohem p die Anteile $\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^p \cdot \mathcal{A}_{0i}$ und $\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^p$ für i = 2, 3, ..., n bis auf beliebig kleine Restanteile verschwinden:

$$\lim_{p \to \infty} \frac{\mathcal{A}^p}{\sum a_{ii}^{(p)}} = \mathcal{A}_{01}.$$

Beispiel:

In dem Zahlenbeispiel, das im vorigen Abschnitt (Seite 73) betrachtet wurde, findet man bei Anwendung der Gleichung (80) für p = 2:

$$\frac{\mathcal{A}^2}{\sum a_{ii}^{(2)}} = \frac{1}{334}\begin{pmatrix} 200 & 150 & 20 \\ 150 & 129 & 12 \\ 20 & 12 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}599 & 0{,}449 & 0{,}060 \\ 0{,}449 & 0{,}386 & 0{,}036 \\ 0{,}060 & 0{,}036 & 0{,}015 \end{pmatrix}$$

Entsprechend findet man für $p = 4$:

$$\frac{\mathfrak{A}^4}{\sum a_{ii}^{(4)}} = \begin{pmatrix} 0{,}61214 & 0{,}48261 & 0{,}05741 \\ 0{,}48261 & 0{,}38232 & 0{,}04484 \\ 0{,}05741 & 0{,}04484 & 0{,}00554 \end{pmatrix}$$

und für $p = 8$:

$$\frac{\mathfrak{A}^8}{\sum a_{ii}^{(8)}} = \begin{pmatrix} 0{,}612545 & 0{,}483791 & 0{,}057260 \\ 0{,}483791 & 0{,}382102 & 0{,}045224 \\ 0{,}057260 & 0{,}045224 & 0{,}005353 \end{pmatrix} .$$

Im Fall $p = 8$ stimmen die Elemente der gefundenen Matrix bereits über etwa 5 Dezimalstellen mit denen der genauen Elementarmatrix $\mathfrak{A}_{01}$ überein.

Durch genügend hohes Potenzieren kann man also die Elementarmatrix $\mathfrak{A}_{01}$ mit jeder gewünschten Genauigkeit berechnen.

Den Eigenwert λ_1 findet man dann entweder aus der Diagonalsumme der Matrix $\mathfrak{A}^p$:

$$\lambda_1 = \sqrt[p]{\sum a_{ii}^{(p)}} = \sqrt[p]{\lambda_1^p + \lambda_2^p + \ldots + \lambda_n^p}$$

oder man benutzt das im vorigen Abschnitt beschriebene Verfahren, indem man eine Spalte der errechneten Matrix $\mathfrak{A}^p$ nochmals mit der Matrix $\mathfrak{A}$ oder mit einer Potenz von $\mathfrak{A}$ multipliziert.

2. Grenzen für die Brauchbarkeit des Verfahrens.

Da das mehrmalige Quadrieren einer Matrix, ebenso wie das wiederholte Multiplizieren eines Vektors mit einer Matrix, immerhin einen ziemlich grossen Arbeitsaufwand erfordert, so empfiehlt es sich im allgemeinen, die in diesem und im vorigen Abschnitt beschriebenen Verfahren nur dann zu benutzen, wenn der gesuchte, grösste Eigenwert der betreffenden Matrix bedeutend grösser ist (mindestens etwa doppelt so gross, möglichst aber noch erheblich grösser), als der zweitgrösste.

Andernfalls müsste man eine sehr hohe Potenz der Matrix berechnen, um in der potenzierten Matrix

$$\mathfrak{A}^p = \lambda_1^p \cdot \left(\mathfrak{A}_{01} + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^p \cdot \mathfrak{A}_{02} + \ldots + \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^p \cdot \mathfrak{A}_{0n} \right)$$

den Anteil der Elementarmatrix $\mathfrak{A}_{02}$ bis auf einen genügend kleinen Rest zum Verschwinden zu bringen.

Nun sind allerdings zunächst die Eigenwerte λ_1 und λ_2 nicht bekannt. Man kann daher über ihr Verhältnis nichts Genaues aussagen. Es genügt hierfür aber schon eine ziemlich grobe Schätzung, und diese kann ohne grosse Rechenarbeit leicht durchgeführt werden.

Der einfachste Weg ist wohl folgender: Man versucht aufs Geratewohl die gegebene Matrix durch möglichst geringfügige Aenderung der einzelnen Elemente in eine Matrix vom Rang 1 umzuwandeln. Mit anderen Worten: Die Matrix $\mathfrak{A}$ wird willkürlich zerlegt in eine Matrix $\mathfrak{M}$ vom Rang 1 und eine Restmatrix $\mathfrak{R}$, deren sämtliche Elemente möglichst klein sein sollen, jedenfalls aber beträchtlich kleiner als die grössten Elemente der Matrix $\mathfrak{M}$. Gelingt eine solche Zerlegung, so kann man aus dem Grössenverhältnis der Elemente der beiden Matrizen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{R}$ ohne weitere Rechnung gewisse Rückschlüsse auf das Verhältnis der beiden grössten Eigenwerte ziehen.

Zahlenbeispiele.

1) Die Matrix $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 0 \\ 10 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ kann z.B. in folgende Teile zerlegt werden:

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 1 \\ 8 & 6{,}4 & 0{,}8 \\ 1 & 0{,}8 & 0{,}1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{R} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1{,}4 & 1{,}2 \\ -1 & 1{,}2 & 0{,}9 \end{pmatrix}$$

Die Elemente der Matrix $\mathfrak{R}$ sind, verglichen mit denen der Matrix $\mathfrak{M}$, sehr klein. Tatsächlich sind in diesem Fall die beiden grössten Eigenwerte der Matrix $\mathfrak{A}$ sehr verschieden gross:

$$\lambda_1 = 17{,}898 \quad , \quad \lambda_2 = -3{,}384 \quad , \quad |\lambda_1| : |\lambda_2| = 5{,}29 : 1$$

Bei solchem Grössenunterschied wird man bereits durch wenige Quadraturen die Elementarmatrix $\mathfrak{A}_{01}$ mit ausreichender Genauigkeit berechnen können.

2) Die Matrix $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 18 & 5 & 2 \\ 5 & 13 & 3 \\ 2 & 3 & 10 \end{pmatrix}$ kann zerlegt werden in

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} 12{,}5 & 10 & 7{,}5 \\ 10 & 8 & 6 \\ 7{,}5 & 6 & 4{,}5 \end{pmatrix} \text{ und } \mathfrak{R} = \begin{pmatrix} 5{,}5 & -5 & -5{,}5 \\ -5 & 5 & -3 \\ -5{,}5 & -3 & 5{,}5 \end{pmatrix}$$

Die Elemente der Matrix $\mathfrak{R}$ sind hier im Verhältnis etwas grösser als im ersten Beispiel, immerhin aber noch bedeutend kleiner als die grössten Elemente der Matrix $\mathfrak{M}$.

In diesem Fall sind die beiden grössten Eigenwerte

$$\lambda_1' = 22 \quad , \quad \lambda_2 = 11 \quad , \quad \text{also} \quad |\lambda_1| : |\lambda_2| = 2 : 1 \, .$$

Auch hier kann man durch mehrmaliges Quadrieren der Matrix $\mathfrak{A}$ die Elementarmatrix $\mathfrak{A}_{01}$ berechnen; infolge der geringeren Verschieden-

heit der Eigenwerte λ_1 und λ_2 ist aber hierfür eine grössere Rechenarbeit erforderlich als im Beispiel 1.

3) Die Matrix $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 15 & 2 & -3 \\ 2 & 12 & 6 \\ -3 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ lässt sich nicht in der gewünschten Weise zerlegen. Möglich wäre höchstens etwa die Zerlegung

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 4 \\ 7 & 4{,}9 & 2{,}8 \\ 4 & 2{,}8 & 1{,}6 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{N} = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -7 \\ -5 & 7{,}1 & 3{,}2 \\ -7 & 3{,}2 & 6{,}4 \end{pmatrix}$$

wobei jedoch die Elemente in beiden Matrizen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ ungefähr von der gleichen Grössenordnung sind. Tatsächlich sind in diesem Fall die beiden grössten Eigenwerte kaum voneinander verschieden:

$$\lambda_1 = 16{,}374 \quad , \qquad \lambda_2 = 16{,}0.$$

Ein Potenzieren der Matrix $\mathfrak{A}$ wäre also in diesem Fall völlig zwecklos.

Es gibt noch andere Mittel, die es ermöglichen, gewisse Rückschlüsse auf das Grössenverhältnis der beiden grössten Eigenwerte einer gegebenen Matrix zu ziehen, jedoch scheint der hier angegebene Weg der bequemste zu sein.

3.) Bestimmung einer beliebigen Elementarmatrix.

In ähnlicher Weise, wie man mit Hilfe der Elementarmatrix $\mathfrak{A}_{01}$ den grössten Eigenwert λ_1 der Matrix $\mathfrak{A}$ berechnen kann, ist es in vielen Fällen auch möglich, einen beliebigen, in irgendeiner Weise festgelegten Eigenwert λ_K (z.B. den zweitgrössten Eigenwert λ_2 oder den kleinsten Eigenwert λ_n) mit Hilfe der entsprechenden Elementarmatrix $\mathfrak{A}_{0K}$ zu ermitteln.

Man berechnet zu diesem Zweck eine Matrix $\mathfrak{Z} = f(\mathfrak{A})$, die eine rationale Funktion von $\mathfrak{A}$ und folglich (nach Gleichung 77, Seite 95) aus den gleichen Elementarmatrizen $\mathfrak{A}_{0i}$ zusammengesetzt ist:

$$\mathfrak{Z} = f(\mathfrak{A}) = \beta_1 \mathfrak{A}_{01} + \beta_2 \mathfrak{A}_{02} + \ldots + \beta_n \mathfrak{A}_{0n};$$

und zwar soll der zu der gesuchten Elementarmatrix $\mathfrak{A}_{0K}$ gehörige Eigenwert β_K beträchtlich grösser sein, als alle übrigen Eigenwerte der Matrix $\mathfrak{Z}$:

$$\beta_K \gg \beta_i \qquad (i = 1, \ldots, K-1, K+1, \ldots, n)$$

Hat man eine geeignete Matrix $\mathcal{L}$ gefunden, die diese Bedingung erfüllt, so kann man durch Potenzieren dieser Matrix oder durch wiederholtes Multiplizieren eines Vektors mit der Matrix die gesuchte Elementarmatrix $\mathcal{A}_{0K}$ bzw. die Eigenlösung ξ^K bis zu jeder gewünschten Genauigkeit berechnen. Es können genau die gleichen Verfahren benutzt werden, die in den Abschnitten VI, 1 (Seite 73) und VII, B, 1 (Seite 98) für die Berechnung der Eigenlösung ξ^1 und der Elementarmatrix $\mathcal{A}_{01}$ beschrieben wurde.

Hat man die Eigenlösung ξ^K mit der gewünschten Genauigkeit errechnet, so findet man λ_K durch Multiplikation mit der Matrix $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} \cdot \xi^K = \lambda_K \cdot \xi^K .$$

Oft ist es allerdings schwierig oder nur mit grossem Arbeitsaufwand möglich, eine Matrix $\mathcal{L} = f(\mathcal{A})$ zu finden, die sich zur Berechnung der gesuchten Elementarmatrix $\mathcal{A}_{0K}$ eignet. Einige Fälle, in denen man mit geringer Mühe eine für diesen Zweck brauchbare Matrix $\mathcal{L}$ errechnen kann, werden im folgenden betrachtet.

4. Abtrennung bekannter Elementarmatrizen aus der Matrix $\mathcal{A}$.

Wenn der grösste Eigenwert λ_1 der Matrix $\mathcal{A}$ und die entsprechende Elementarmatrix $\mathcal{A}_{01}$ bereits bekannt sind, so kann man in einfacher Weise eine Matrix $\mathcal{L} = f(\mathcal{A})$ angeben, die sich zur Berechnung des zweitgrössten Eigenwertes λ_2 und der entsprechenden Elementarmatrix $\mathcal{A}_{02}$ eignet.

Subtrahiert man nämlich von der Matrix $\mathcal{A}$ den in ihr enthaltenen Anteil der Elementarmatrix $\mathcal{A}_{01}$, so sind in der übrigbleibenden Matrix

$$\mathcal{L} = \mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{A}_{01} = \lambda_2 \mathcal{A}_{02} + \lambda_3 \mathcal{A}_{03} + \ldots\ldots + \lambda_n \mathcal{A}_{0n} \qquad (81)$$

alle Eigenwerte ausser λ_1 unverändert geblieben, und zwar ist λ_2 nunmehr der grösste Eigenwert. Durch Potenzieren dieser Matrix $\mathcal{L} = \mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{A}_{01}$ kann man also die Elementarmatrix $\mathcal{A}_{02}$ und den Eigenwert λ_2 bestimmen.

Man kann dieses Verfahren beliebig fortsetzen und z.B. aus der Matrix

$$\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{A}_{01} - \lambda_2 \mathcal{A}_{02} = \lambda_3 \mathcal{A}_{03} + \ldots\ldots + \lambda_n \mathcal{A}_{0n}$$

auch den drittgrössten Eigenwert λ_3 und die entsprechende Elementarmatrix $\mathcal{A}_{03}$ berechnen, und so fort.

Bei diesem Verfahren wird die Bildung sehr kleiner Differenzen aus sehr grossen Zahlen, die bei dem früher beschriebenen Verfahren (vergl. Seite 76...82) einer Berechnung der Eigenwerte λ_2, λ_3, ... im Weg stand, vollständig vermieden. Die Rechnung braucht also hier nicht mit übertriebener Genauigkeit durchgeführt zu werden. Oft wird bereits die Genauigkeit eines Rechenschiebers ausreichen, um sämtliche Eigenwerte einer Matrix hinlänglich genau zu berechnen.

Trotzdem ist gerade zur Berechnung sämtlicher Eigenwerte der hier beschriebene Weg im allgemeinen nicht zu empfehlen, weil das wiederholte Quadrieren der Matrizen einen beträchtlichen Arbeitsaufwand erfordert, während andere Verfahren (vergl. Abschnitt I bis V, ferner Abschnitt X, Seite 157) oft mit wesentlich geringerer Rechenarbeit zum Ziel führen.

Dagegen gibt es zahlreiche Möglichkeiten, das hier geschilderte Verfahren in etwas abgeänderter Form zur Berechnung einzelner Elementarmatrizen und der zugehörigen Eigenwerte zu benutzen. Das soll im folgenden gezeigt werden.

5. Berechnung des zweitgrössten Eigenwertes λ_2 und der Elementarmatrix $\mathfrak{A}_{02}$.

Eine Matrix $\mathfrak{Z} = f(\mathfrak{A})$, in der die Elementarmatrix $\mathfrak{A}_{02}$ den grössten Eigenwert besitzt, kann man meistens sehr leicht bestimmen. In jedem Ausdruck von Form

$$\mathfrak{Z} = \lambda_1^{p-q} \cdot \mathfrak{A}^q - \mathfrak{A}^p \qquad (p > q \geq 1)$$

verschwindet der Anteil der Elementarmatrix $\mathfrak{A}_{01}$.
Wählt man die Exponenten q und p genügend gross, so kann man stets erreichen, dass in dieser Matrix

$$\mathfrak{Z} = \sum \left(\lambda_1^{p-q} \cdot \lambda_i^q - \lambda_i^p\right) \cdot \mathfrak{A}_{0i}$$

$$= \sum \lambda_i^q \cdot \left(\lambda_1^{p-q} - \lambda_i^{p-q}\right) \cdot \mathfrak{A}_{0i}$$

der zu $\mathfrak{A}_{02}$ gehörige Eigenwert

$$\beta_2 = \lambda_2^q \cdot \left(\lambda_1^{p-q} - \lambda_2^{p-q}\right)$$

grösser ist als alle übrigen Eigenwerte dieser Matrix $\mathfrak{Z}$.

Meistens genügt für die Berechnung von $\mathfrak{A}_{02}$ bereits die Matrix

$$\mathfrak{Z} = \lambda_1 \cdot \mathfrak{A} - \mathfrak{A}^2 \quad .$$

Uebrigens ist es hierfür auch nicht notwendig, den genauen Eigenwert λ_1 zu kennen; es genügt oft ein ziemlich grober Näherungswert λ_1', wie das folgende Zahlenbeispiel zeigt.
Die Matrix

$$\mathfrak{Z} = \lambda_1' \cdot \mathfrak{A} - \mathfrak{A}^2$$

enthält dann zwar auch noch einen kleinen Anteil der Elementarmatrix $\mathfrak{A}_{01}$, der jedoch beim Potenzieren der Matrix $\mathfrak{Z}$ ebenso verschwindet, wie die Anteile der Elementarmatrizen $\mathfrak{A}_{03}$, ..., $\mathfrak{A}_{0n}$.

Beispiel.

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 0 \\ 10 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathfrak{A}^2 = \begin{pmatrix} 200 & 150 & 20 \\ 150 & 129 & 12 \\ 20 & 12 & 5 \end{pmatrix}$$

Bereits aus der Diagonalsumme von $\mathfrak{A}^2$ findet man einen Näherungswert für λ_1, dessen Genauigkeit für die Berechnung der Elementarmatrix $\mathfrak{A}_{02}$ ausreicht:

$$\lambda_1' = \sqrt{200 + 129 + 5} = \sqrt{334} = 18{,}28$$

oder abgerundet

$$\lambda_1' = 18.$$

(Man könnte übrigens für die Berechnung von $\mathfrak{A}_{02}$ auch einen wesentlich ungenaueren Wert λ_1' benutzen; man überzeugt sich leicht, dass man z.B. mit $\lambda_1' = 17$ oder $\lambda_1' = 19$ ungefähr ebenso rasch zum genauen Ergebnis gelangt, wie mit $\lambda_1' = 18$).

Mit diesem Wert $\lambda_1' = 18$ findet man

$$\mathfrak{Z} = 18 \cdot \mathfrak{A} - \mathfrak{A}^2 = \begin{pmatrix} -20 & 30 & -20 \\ 30 & -39 & 24 \\ -20 & 24 & 13 \end{pmatrix}$$

Die beiden ersten Spalten dieser Matrix sind bereits in grober Annäherung parallel, die Richtung der dritten Spalte weicht jedoch beträchtlich ab. Man wird deshalb am besten zuerst die Matrix ins Quadrat erheben, um eine bessere Proportionalität aller Spalten zu erreichen:

$$\mathfrak{Z}^2 = \begin{pmatrix} 1700 & -2250 & 860 \\ -2250 & 2997 & -1224 \\ 860 & -1224 & 1145 \end{pmatrix}$$

Dann wird ein beliebig wählbarer Vektor, z.B. ein Einheitsvektor, so oft mit $\mathfrak{A}^2$ multipliziert, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist. Zuvor kann man noch, um unnötig hohe Stellenzahlen zu vermeiden, die Matrix $\mathfrak{A}^2$ durch einen konstanten Faktor dividieren, z.B.:

$$\frac{1}{1000}\cdot\mathfrak{A}^2 = \begin{pmatrix} 1,7 & -2,25 & 0,86 \\ -2,25 & 2,997 & -1,224 \\ 0,86 & -1,224 & 1,145 \end{pmatrix}$$

Man findet dann

$$\mathfrak{z}_0 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \mathfrak{z}_1 = \begin{pmatrix}1,7\\-2,25\\0,86\end{pmatrix},\quad \mathfrak{z}_2 = \begin{pmatrix}8,69\\-11,62\\5,20\end{pmatrix},\quad \mathfrak{z}_3 = \begin{pmatrix}45,390\\-60,742\\27,650\end{pmatrix},\quad \mathfrak{z}_4 = \begin{pmatrix}237,611\\-318,015\\145,043\end{pmatrix}$$

Die Vektoren $\mathfrak{z}_3$ und $\mathfrak{z}_4$ sind einander, und, wie hieraus gefolgert werden kann, auch der gesuchten Eigenlösung $\mathfrak{z}_2$ bereits recht genau proportional.

Für λ_2 findet man, indem man $\mathfrak{z}_4$ mit der Matrix $\mathfrak{A}$ multipliziert, folgende Werte:

$$\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{z}_4 = \begin{pmatrix}10 & 10 & 0\\ 10 & 5 & 2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}237,611\\-318,015\\145,043\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-804,040\\1076,121\\490,987\end{pmatrix},\quad \lambda_2 = \begin{cases}-3,38385\\-3,38387\\-3,38511\end{cases}$$

Durch mehrfach wiederholtes Quadrieren der Matrix $\mathfrak{A}$

$$\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^2,\quad \mathfrak{A}^2\cdot\mathfrak{A}^2 = \mathfrak{A}^4,\quad \mathfrak{A}^4\cdot\mathfrak{A}^4 = \mathfrak{A}^8$$

kann man auch die Elementarmatrix $\mathfrak{A}_{02}$ mit jeder gewünschten Genauigkeit berechnen. Im vorliegenden Beispiel ergibt die Matrix $\mathfrak{A}^8$ eine Genauigkeit über etwa 4 Dezimalstellen.

Meistens kann aber auf die Berechnung der Elementarmatrix selbst verzichtet werden; es genügt im allgemeinen, die Eigenwerte und Eigenlösungen zu bestimmen.

6. Systematische Berechnung der Eigenwerte und Eigenlösungen.

Will man die ersten m Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ $(m \leq n)$ der Reihe nach berechnen, so eignet sich hierfür oft der folgende Weg.

Zur Ermittlung der ersten Eigenlösung $\mathfrak{z}_1$ wird zunächst die Matrix $\mathfrak{A}^2$, und, falls es nötig sein sollte, auch noch eine höhere Potenz der Matrix $\mathfrak{A}$ berechnet. Durch mehrmaliges Multiplizieren eines Vektors mit der Matrix $\mathfrak{A}^2$ bzw. $\mathfrak{A}^4$ findet man mit beliebiger Genauigkeit die Eigenlösung $\mathfrak{z}_1$ und den Eigenwert λ_1. Für die weitere Rechnung genügt ein Näherungswert λ_1'.

Zur Ermittlung der Eigenlösung $\mathfrak{z}_2$ dient, wie auf Seite 102 ff beschrieben, die Matrix

$$\mathfrak{Z} = \lambda_1' \mathfrak{A} - \mathfrak{A}^2$$

oder allgemein, falls die Potenzen $\mathfrak{A}^q$ und $\mathfrak{A}^p$ bekannt sind ($q \geq 1$, $p \geq q+1$),

$$\mathfrak{Z} = (\lambda_1')^{p-q} \cdot \mathfrak{A}^q - \mathfrak{A}^p .$$

Die Eigenwerte dieser Matrix sind

$$\beta_i = (\lambda_1')^{p-q} \cdot \lambda_i^q - \lambda_i^p \quad ,$$

im Sonderfall $q = 1$, $p = 2$ also

$$\beta_i = \lambda_1' \cdot \lambda_i - \lambda_i^2$$

Wenn für die Berechnung der Matrix $\mathfrak{Z}$ ein hinreichend genauer Näherungswert λ_1' und nötigenfalls ein Exponent $p > 2$ benutzt wird, so kann man fast immer erreichen, dass die Grössenfolge dieser Eigenwerte β_i sich von der Grössenfolge der entsprechenden λ_i nur dadurch unterscheidet, dass der Wert

$$\beta_1 = \lambda_1' \cdot \lambda_1 - \lambda_1^2$$

dem Betrage nach kleiner ist als sämtliche übrigen Eigenwerte β_i ; es sei also

$$|\beta_2| > |\beta_3| > \ldots\ldots > |\beta_n| > |\beta_1| .$$

Mit dieser Matrix

$$\mathfrak{Z} = \beta_2 \mathfrak{A}_{02} + \beta_3 \mathfrak{A}_{03} + \ldots\ldots + \beta_n \mathfrak{A}_{0n} + \beta_1 \mathfrak{A}_{01}$$

kann man nun genau so vorgehen, wie vorher mit der Matrix $\mathfrak{A}$: Man berechnet die Matrix $\mathfrak{Z}^2$ (nötigenfalls auch $\mathfrak{Z}^4$) und kann dann mit jeder gewünschten Genauigkeit die Eigenlösung $\mathfrak{z}_2$ und hieraus die Eigenwerte

$$\lambda_2 = (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{z}_2) : \mathfrak{z}_2 \qquad \text{und} \qquad \beta_2 = (\mathfrak{Z} \cdot \mathfrak{z}_2) : \mathfrak{z}_2$$

berechnen.

Zur Berechnung von $\mathfrak{z}_3$ dient dann die Matrix

$$\mathfrak{Z} = (\beta_2')^{p-q} \cdot \mathfrak{Z}^q - \mathfrak{Z}^p$$

wobei man meistens wieder $q = 1$, $p = 2$ setzen und für β_2' einen Näherungswert benutzen kann.

Durch fortgesetzte Anwendung dieses Verfahrens ist es im allgemeinen möglich, der Reihe nach sämtliche Eigenwerte und Eigenlösungen der Matrix $\mathfrak{A}$, und wenn es gewünscht wird, auch die entspre-

chenden Elementarmatrizen mit beliebiger Genauigkeit zu berechnen.

Zahlenbeispiel:

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A}^2 = \begin{pmatrix} 125 & 75 & 10 & 0 \\ 75 & 54 & 16 & 2 \\ 10 & 16 & 14 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Mit der Matrix $\mathfrak{A}^2$ kann man die Eigenlösung $\mathfrak{x}_1$ und hieraus den Eigenwert λ_1 rasch und bequem und mit beliebiger Genauigkeit berechnen; man findet $\lambda_1 = 13{,}202$.

Für die weiteren Rechnungen möge der angenäherte Wert $\lambda_1' = 13$ zugrunde gelegt werden, es sei also

$$\mathfrak{Z} = 13\,\mathfrak{A} - \mathfrak{A}^2 = \begin{pmatrix} 5 & -10 & -10 & 0 \\ -10 & 11 & 10 & -2 \\ -10 & 10 & 25 & 9 \\ 0 & -2 & 9 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{Z}^2 = \begin{pmatrix} 225 & -260 & -400 & -70 \\ -260 & 325 & 442 & 46 \\ -400 & 442 & 906 & 304 \\ -70 & 46 & 304 & 206 \end{pmatrix}$$

Der grösste Eigenwert der Matrix $\mathfrak{Z}$ beträgt angenähert $\beta_2' = 37$.

Zur Berechnung von $\mathfrak{x}_3$ und λ_3 dient die Matrix

$$\mathfrak{L} = 37\cdot\mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}^2 = \begin{pmatrix} -40 & -110 & 30 & 70 \\ -110 & 82 & -72 & -120 \\ 30 & -72 & 19 & 29 \\ 70 & -120 & 29 & 201 \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{L}^2 = \begin{pmatrix} 19500 & -15180 & 9320 & 25340 \\ -15180 & 38408 & -14052 & -43748 \\ 9320 & -14052 & 7286 & 17120 \\ 25340 & -43748 & 17120 & 60542 \end{pmatrix}$$

Schon in der Matrix $\mathfrak{L}$, besonders aber in $\mathfrak{L}^2$ ist ein deutliches Hervortreten der Elementarmatrix $\mathfrak{A}_{03}$ zu erkennen.

In vielen Fällen ist es möglich, durch fortgesetzte Anwendung dieses Verfahrens beliebig viele (im Grenzfall sämtliche) Eigenwerte und Eigenlösungen der Matrix $\mathfrak{A}$ der Reihe nach zu berechnen.

Oft stellen sich jedoch bei der Berechnung der kleineren Eigenwerte gewisse Schwierigkeiten ein, besonders dann, wenn zwei Eigenwerte der Matrix $\mathfrak{A}$, z.B. λ_κ und $\lambda_{\kappa+1}$ voneinander nur wenig verschieden sind. Hierdurch wird zwar die Berechnung der $\kappa - 1$ grössten Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_{\kappa-1}$ und der entsprechenden Eigenlösungen $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{\kappa-1}$ nicht beeinflusst. Für die Berechnung von λ_κ und $\mathfrak{x}_\kappa$ ist jedoch aus den auf Seite 99 besprochenen Gründen dieses Verfahren meistens ungeeignet.

Auch dann, wenn sämtliche Eigenwerte der Matrix $\mathfrak{A}$ beträchtlich voneinander verschieden sind (z.B. je zwei aufeinander folgende Werte mindestens im Verhältnis 2 : 1), können sich bei der Berechnung der kleineren Eigenwerte Schwierigkeiten einstellen, deren Ursachen noch betrachtet werden sollen.

7. Lösung der Aufgabe bei geringer Verschiedenheit der Eigenwerte λ_i.

Will man die Eigenwerte λ_2, λ_3, ... mit Hilfe der Matrizen

$$\mathfrak{Z} = \lambda_1'\mathfrak{A} - \mathfrak{A}^2 , \quad \mathfrak{C} = \beta_2'\mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}^2 , \ldots$$

berechnen, so genügt es hierfür nicht, wenn je zwei aufeinander folgende Eigenwerte der Matrix $\mathfrak{A}$ etwa im Verhältnis 2 : 1 voneinander verschieden sind. Je grösser die Anzahl der Eigenwerte λ_i ist, die in der beschriebenen Weise der Reihe nach berechnet werden sollen, umso grösser muss der Quotient je zweier Eigenwerte λ_i und λ_{i+1} sein, und zwar aus folgendem Grund.

Wenn, wie es bei praktischen Anwendungen fast immer zutreffen wird, sämtliche Eigenwerte der gegebenen Matrix $\mathfrak{A}$ positiv sind, und wenn ferner

$$\lambda_2 + \lambda_3 < \lambda_1' ,$$

so wird zwar in der Matrix $\mathfrak{Z} = \lambda_1'\mathfrak{A} - \mathfrak{A}^2$ die Grössenfolge der Eigenwerte $\beta_i = (\lambda_1' - \lambda_i)\cdot\lambda_i$ für i = 2, 3, ..., n genau die gleiche sein, wie die der entsprechenden Eigenwerte der Matrix $\mathfrak{A}$:

$$\begin{aligned} \lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \ldots\ldots > \lambda_n > 0 \\ \beta_2 > \beta_3 > \ldots\ldots > \beta_n > 0 \end{aligned} \qquad (82)$$

denn für $i \gtrless 2$ ist dann

$$\lambda_1' > \lambda_i + \lambda_{i+1} > \lambda_i > \lambda_{i+1} > 0 .$$

also

$$\beta_i - \beta_{i+1} = (\lambda_1' - \lambda_i)\lambda_i - (\lambda_1' - \lambda_{i+1})\lambda_{i+1} = (\lambda_1' - \lambda_i - \lambda_{i+1})(\lambda_i - \lambda_{i+1}) > 0 \qquad (83)$$

Aber die Werte β_i sind voneinander weniger verschieden als die Werte λ_i :

$$\frac{\beta_i}{\beta_{i+1}} = \frac{(\lambda_1' - \lambda_i)\cdot\lambda_i}{(\lambda_1' - \lambda_{i+1})\cdot\lambda_{i+1}} = \frac{\lambda_i}{\lambda_{i+1}}\cdot\left(1 - \frac{\lambda_i - \lambda_{i+1}}{\lambda_1' - \lambda_{i+1}}\right) < \frac{\lambda_i}{\lambda_{i+1}}$$

Ist dagegen $\lambda_2 + \lambda_3 \gtrless \lambda_1'$, so ist die Ungleichung (83) nicht erfüllt; denn es ist

$$\beta_2 - \beta_3 = (\lambda_1' - \lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3) \lesseqgtr 0 ,$$

also

$$\beta_3 \gtrless \beta_2 .$$

Wenn mehr als zwei Eigenwerte der Matrix $\mathcal{A}$ der Reihe nach berechnet werden sollen, so kann es vorkommen, dass die entsprechenden Eigenwerte in den Matrizen

$$\mathcal{Z} = \lambda_1' \mathcal{A} - \mathcal{A}^2 \quad , \quad \mathcal{L} = \beta_2' \mathcal{Z} - \mathcal{Z}^2 , \ldots$$

immer enger aneinander rücken, bis schliesslich in einer dieser Matrizen die beiden jeweils grössten Eigenwerte einander fast oder genau gleich sind oder sogar in vertauschter Grössenfolge erscheinen.

Zahlenbeispiel.

Die auf Seite 18 betrachtete Matrix

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 10 & 8 & -7 & -8 \\ 6 & 4 & -3 & -6 \\ 3 & -3 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

hat die Eigenwerte

$$\lambda_1 = 10 \quad , \quad \lambda_2 = 4 \quad , \quad \lambda_3 = 2 \quad , \quad \lambda_4 = 1.$$

Die Matrix $\mathcal{Z} = \lambda_1' \mathcal{A} - \mathcal{A}^2$ besitzt in diesem Fall, wenn man für λ_1' den genauen Wert $\lambda_1 = 10$ einsetzt, die Eigenwerte $\beta_i = (10 - \lambda_i) \cdot \lambda_i$, also

$$\beta_1 = 0 \quad , \quad \beta_2 = 24 \quad , \quad \beta_3 = 16 \quad , \quad \beta_4 = 9 .$$

Die Werte β_2 , β_3 , β_4 sind bereits enger aneinander gerückt, so dass zu ihrer Trennung eine erhöhte Rechenarbeit erforderlich wäre.

Dagegen wäre in einem solchen Fall die Matrix $\mathcal{L} = \beta_2' \mathcal{Z} - \mathcal{Z}^2$ zur Berechnung des drittgrössten Eigenwertes λ_3 und der entsprechenden Eigenlösung ξ_3 gänzlich unbrauchbar; denn die Matrix $\mathcal{L} = 24\mathcal{Z} - \mathcal{Z}^2$ besitzt die Eigenwerte $\gamma_i = (24 - \beta_i) \cdot \beta_i$, also

$$\gamma_1 = 0 \quad , \quad \gamma_2 = 0 \quad , \quad \gamma_3 = 128 \quad , \quad \gamma_4 = 135.$$

Die Werte γ_3 und γ_4 sind also kaum voneinander verschieden; ausserdem ist $\gamma_4 > \gamma_3$. Man würde daher selbst durch sehr hohes Potenzieren dieser Matrix $\mathcal{L}$ nicht den gesuchten, drittgrössten Eigenwert γ_3 finden, sondern den nächstkleineren Eigenwert λ_4 .

Man kann sich in solchen Fällen meistens dadurch helfen, dass man die Matrix $\mathcal{A}$, falls ihre Spalten noch nicht in genügendem Mass parallel sind, nochmals ins Quadrat erhebt und für die weitere Rechnung die Matrix

$$\mathcal{Z} = \lambda_1'^2 \cdot \mathcal{A}^2 - \mathcal{A}^4$$

benutzt.

In dem soeben angeführten Beispiel kann man mit Hilfe der Matrizen $\mathfrak{A}^2$ und $\mathfrak{A}^4$ und des Eigenwertes $\lambda_1 = 10$ die Matrix

$$\mathfrak{Z} = 100 \cdot \mathfrak{A}^2 - \mathfrak{A}^4$$

berechnen; deren Eigenwerte sind $\beta_i = (100 - \lambda_i^2) \cdot \lambda_i^2$, also

$$\beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 1344, \quad \beta_3 = 384, \quad \beta_4 = 99.$$

Die Matrix $\mathfrak{Z} = 1344\mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}^2$ besitzt die noch reichlich voneinander verschiedenen Eigenwerte

$$\gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 368640, \quad \gamma_4 = 123255.$$

Nötigenfalls kann man durch mehrmaliges Quadrieren einer Matrix, deren Eigenwerte in beliebigem Mass auseinander ziehen. Wenn z.B. alle Eigenwerte der Matrix $\mathfrak{A}^9$ mindestens im Verhältnis 4 : 1 voneinander verschieden sind, so können diese Eigenwerte sämtlich mit Hilfe der Matrizen

$$\mathfrak{Z} = \lambda_1'^9 \mathfrak{A}^9 - \mathfrak{A}^{29}$$
$$\mathfrak{Z} = \beta_2' \mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}^2$$
$$\mathfrak{Z} = \gamma_3' \mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}^2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

berechnet werden, ohne dass sich dabei die Grössenfolge der noch unbekannten Eigenwerte ändert:

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_n > 0$$
$$\beta_2 > \beta_3 > \ldots > \beta_n > 0$$
$$\gamma_3 > \gamma_4 > \ldots > \gamma_n > 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Aehnliche Bedingungen gelten für den Fall, dass einige Eigenwerte der gegebenen Matrix $\mathfrak{A}$ positiv, die übrigen negativ sind.

8. Beseitigung der Restanteile der bereits bekannten Elementarmatrizen aus einer Matrix $f(\mathfrak{A})$.

Wenn die Elementarmatrix $\mathfrak{A}_{02}$ mit Hilfe der Matrix $\mathfrak{Z} = \lambda_1'\mathfrak{A} - \mathfrak{A}^2$ berechnet werden soll, so kann man, wie bereits gezeigt wurde, für λ_1' oft einen ziemlich groben Näherungswert benutzen, ohne dass hierdurch die Berechnung von λ_2 erschwert wird. Oft ist es sogar sehr vorteilhaft, für λ_1' einen möglichst abgerundeten Wert einzusetzen, da durch die Verwendung runder Zahlen die praktische Durch-

rechnung vereinfacht wird.

Durch die Benutzung eines ungenauen Wertes λ_1' kann jedoch bei der Berechnung der kleineren Eigenwerte λ_3 , λ_4 , ... eine neue Schwierigkeit auftreten: Falls der in λ_1' enthaltene Fehler $|\lambda_1' - \lambda_1|$ dem Betrage nach ungefähr gleich oder grösser ist als ein anderer Eigenwert λ_m , der ebenfalls noch berechnet werden soll, so ist in der Matrix $\mathfrak{A}$ der Eigenwert $\beta_1 = (\lambda_1' - \lambda_1)\cdot\lambda_1$ ungefähr gleich gross bzw. grösser als der Wert $\beta_m = (\lambda_1' - \lambda_m)\cdot\lambda_m$, denn es ist, da $\lambda_m \ll \lambda_1$,

$$\lambda_1' - \lambda_m \approx \lambda_1' \approx \lambda_1 ,$$

also

$$\beta_1 : \beta_m \approx (\lambda_1' - \lambda_1) : \lambda_m .$$

Wenn aber $\beta_1 \approx \beta_m$ ist, so werden in der Regel auch in den mit Hilfe der Matrix $\mathfrak{A}$ errechneten Matrizen $\mathfrak{C} = \beta_2' \mathfrak{A} - \mathfrak{A}^2$, $\mathfrak{D} = \gamma_3' \mathfrak{C} - \mathfrak{C}^2$, ... die entsprechenden Eigenwerte kaum von einander verschieden sein:

$$\gamma_1 \approx \gamma_m , \quad \delta_1 \approx \delta_m , \ldots .$$

Allgemein sei $\mathfrak{D} = f(\mathfrak{A})$ diejenige Matrix, die, nach vorausgegangener Bestimmung der $(m-1)$ ersten Eigenwerte und der entsprechenden Eigenlösungen, zur Berechnung der Elementarmatrix $\mathfrak{A}_{om}$ bzw. der Eigenlösung ξ_m und des Eigenwertes λ_m dienen soll. Unter den Eigenwerten dieser Matrix $\mathfrak{D}$

$$\delta_i = f(\lambda_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

sei also $|\delta_1| >$ oder $\approx |\delta_m|$, während alle übrigen Werte δ_i dem Betrage nach wesentlich kleiner sein mögen als δ_m .

Es besteht die Aufgabe, aus der Matrix $\mathfrak{D} = \sum \delta_i \mathfrak{A}_{oi}$ den Anteil der Elementarmatrix $\mathfrak{A}_{o1}$ zu entfernen, um auf diese Weise eine neue Matrix $\mathfrak{D}^* = \sum \delta_i^* \mathfrak{A}_{oi}$ zu ermitteln, in der der Wert δ_m^* bedeutend grösser ist als jeder der übrigen Werte δ_i^* .
Man findet eine solche Matrix in folgender Weise:

Es darf vorausgesetzt werden, dass die Eigenlösung ξ_1 , die ja zur Ermittlung von λ_1 benutzt wurde, mindestens angenähert bekannt ist. Bekannt ist ferner eine Potenz der Matrix $\mathfrak{A}$ (mindestens $\mathfrak{A}^2$, allgemein $\mathfrak{A}^q$), die einen weitaus hervorragenden Anteil der Elementarmatrix $\mathfrak{A}_{o1}$ enthält.
Die Eigenwerte λ_1^q und δ_1 , mit denen die Elementarmatrix $\mathfrak{A}_{o1}$ in den Matrizen $\mathfrak{A}^q$ und $\mathfrak{D}$ enthalten ist, findet man, indem man den

Vektor ξ_1 mit jeder dieser Matrizen multipliziert. (Es genügt auch, nur eine bestimmte Komponente dieser beiden Vektoren $\alpha^9 \cdot \xi_1 = \lambda_1^9 \cdot \xi_1$ und $\vartheta \cdot \xi_1 = \delta_1 \xi_1$ zu berechnen.) In der Matrix

$$\vartheta^* = \vartheta - \frac{\delta_1}{\lambda_1^9} \cdot \alpha^9$$

verschwindet dann der Anteil der Elementarmatrix α_{01}.

Zahlenbeispiel.

In dem auf Seite 106 durchgerechneten Zahlenbeispiel wurde zur Bestimmung der Matrix $\mathfrak{L} = \lambda_1' \alpha - \alpha^2$ anstelle des genauen Wertes $\lambda_1 = 13{,}202$ der grobe Näherungswert $\lambda_1' = 13$ eingesetzt. Da der kleinste Eigenwert der Matrix α rund $\lambda_4 \approx 0{,}13$ beträgt, ist

$$|\lambda_1' - \lambda_1| > |\lambda_4| .$$

Es ist daher zu erwarten, dass in der Matrix $\mathfrak{L}$, und ebenso in den hieraus errechneten Matrizen $\mathfrak{L} = \beta_2' \mathfrak{L} - \mathfrak{L}^2$ und $\vartheta = \gamma_3' \mathfrak{L} - \mathfrak{L}^2$ die Eigenwerte der Elementarmatrix α_{01} grösser oder mindestens von gleicher Grössenordnung sind wie die Eigenwerte der Elementarmatrix α_{04}. Die Matrix ϑ wird daher nicht ohne weiteres zur Berechnung von α_{04} benutzt werden können.

Nachdem die Matrizen $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}^2$ bereits berechnet sind (Seite 106), kann man die Eigenlösung ξ_3 mit der gewünschten Genauigkeit berechnen und findet aus

$$\mathfrak{L} \cdot \xi_3' \approx \gamma_3' \cdot \xi_3'$$

z.B. den Wert $\gamma_3' = 332$.

Zur Berechnung von α_{04}, ξ_4 und λ_4 soll nun die Matrix

$$\vartheta = 332 \cdot \mathfrak{L} - \mathfrak{L}^2 = \begin{pmatrix} -32780 & -21340 & +640 & -2100 \\ -21340 & -11184 & -9852 & +3908 \\ +\ 640 & -\ 9852 & -\ 978 & -7492 \\ -\ 2100 & +\ 3908 & -7492 & +6190 \end{pmatrix}$$

benutzt werden. Sie enthält, wie man durch Multiplikation mit der angenäherten ersten Eigenlösung, z.B.

$$\xi_1' = \begin{pmatrix} 25 \\ 16 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

erkennt, einen sehr grossen Anteil der Elementarmatrix α_{01}. Dieser Anteil kann in der angegebenen Weise beseitigt werden:

Man berechnet z.B. die erste Komponente der beiden Vektoren $\mathfrak{d}\cdot\mathfrak{x}_1'$ und $\mathfrak{A}^2\cdot\mathfrak{x}_1'$

$$\begin{pmatrix}-32780\\-21340\\640\\-2100\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}25\\16\\3\\0\end{pmatrix} = -1159020\ ,\qquad \begin{pmatrix}125\\75\\10\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}25\\16\\3\\0\end{pmatrix} = 4355$$

Man findet also

$$\frac{\delta_1}{\lambda_1^2} \approx \frac{1159020}{4355} \approx -266\ ,$$

$$\mathfrak{d}^* = \mathfrak{d} - 266\cdot\mathfrak{A}^2 = \begin{pmatrix}+470 & -1390 & +3300 & -2100\\ -1390 & +3180 & -5596 & +4440\\ +3300 & -5596 & +2746 & -6428\\ -2100 & +4440 & -6428 & +6722\end{pmatrix}$$

Aehnlich könnte man auch dann vorgehen, wenn die Matrix mehrere bereits bekannte oder annähernd bekannte Elementarmatrizen mit unerwünscht grossen Anteilen enthält.

9. Berechnung des kleinsten Eigenwertes mit Hilfe der reziproken Matrix.

Die zu $\mathfrak{A}$ reziproke Matrix $\mathfrak{A}^{-1}$ besitzt nach Gleichung (77) die Eigenwerte $\frac{1}{\lambda_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$:

$$\mathfrak{A}^{-1} = \frac{1}{\lambda_1}\cdot\mathfrak{A}_{01} + \frac{1}{\lambda_2}\cdot\mathfrak{A}_{02} + \ldots + \frac{1}{\lambda_n}\cdot\mathfrak{A}_{0n}\ .$$

Dem kleinsten Eigenwert in der Matrix λ_n entspricht also der grösste Eigenwert $\frac{1}{\lambda_n}$ der Matrix $\mathfrak{A}^{-1}$. Man kann daher die reziproke Matrix zur Berechnung des kleinsten Eigenwertes benutzen.

Beispiel: Gesucht sei der kleinste Eigenwert λ_4 und die entsprechende Eigenlösung $\mathfrak{x}_4$ der Matrix

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix}10 & 5 & 0 & 0\\ 5 & 5 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Man berechnet die zu $\mathfrak{A}$ reziproke Matrix (verschiedene Verfahren zur Errechnung der reziproken Matrix werden in einem Anhang zu diesem Abschnitt besprochen):

$$\mathfrak{A}^{-1} = \begin{pmatrix}0{,}6 & -1 & 1 & -1\\ -1 & 2 & -2 & 2\\ 1 & -2 & 2{,}5 & -2{,}5\\ -1 & 2 & -2{,}5 & 3{,}5\end{pmatrix}$$

Durch mehrmaliges Multiplizieren eines Vektors mit dieser Matrix (oder auch mit einer Potenz dieser Matrix) findet man $\mathfrak{x}_4$:

$$z_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2{,}5 \\ 3{,}5 \end{pmatrix}, \quad z_2 = \begin{pmatrix} -8{,}6 \\ 17 \\ -20 \\ 23{,}5 \end{pmatrix}, \quad z_3 = \begin{pmatrix} -65{,}66 \\ 129{,}6 \\ -151{,}35 \\ 174{,}85 \end{pmatrix}$$

Den Eigenwert λ_4 findet man aus dem Verhältnis zweier aufeinander folgenden Vektoren z_κ und $z_{\kappa+1} = \mathcal{A}^{-1} \cdot z_\kappa \approx \frac{1}{\lambda_4} \cdot z_\kappa$, indem man entweder das Verhältnis der entsprechenden Komponenten oder bei symmetrischen Matrizen besser das Verhältnis der Vektorenlängen $|z_\kappa| : |z_{\kappa+1}|$ berechnet:

$$z_2 : z_3 = \sqrt{\frac{1315{,}2}{74586{,}7}} = 0{,}1328 .$$

Dieser Weg zur Berechnung des kleinsten Eigenwertes ist allerdings nur dann zu empfehlen, wenn von vorn herein ein Grund zu der Annahme besteht, dass die beiden kleinsten Eigenwerte λ_{n-1} und λ_n dem Betrage nach beträchtlich voneinander verschieden sind. Denn im Falle $\lambda_{n-1} \approx \lambda_n$ wäre die Matrix $\mathcal{A}^{-1}$, zu deren Berechnung immerhin oft ein ziemlich grosser Arbeitsaufwand nötig ist, zur Ermittlung von λ_n unbrauchbar.

10. Bestimmung desjenigen Eigenwertes, der einer gegebenen Zahl am nächsten liegt.

Bei technischen Schwingungsproblemen kommt oft die folgende Aufgabe vor.

Gegeben ist ein bestimmter Zahlenwert c. Es soll festgestellt werden, ob die Matrix $\mathcal{A}$ einen Eigenwert besitzt, der sich nur wenig von diesem Wert c unterscheidet, ob also z.B. eine gegebene Schwingungsfrequenz mit einer Eigenfrequenz des schwingenden Systems in Resonanz liegt.

Die Aufgabe kann in verschiedener Weise formuliert sein:

a) Derjenige Eigenwert λ_K, der sich von c um den geringsten Betrag $|\lambda_K - c|$ unterscheidet, ist zu berechnen.

b) Ausser dem, dem Wert c am nächsten liegenden Eigenwert λ_K soll auch noch derjenige Eigenwert λ_h ($h = K \pm 1$) berechnet werden, der den Wert c von der anderen Seite her einschliesst ($\lambda_h \gtrless c \gtrless \lambda_K$).

c) Es ist ein Wert d zu ermitteln, derart, dass in dem Bereich $c \pm d$ kein Eigenwert der Matrix $\mathcal{A}$ liegt.

Es sei dabei vorausgesetzt, dass sämtliche Eigenwerte der Matrix $\mathcal{A}$ reell sind.

Zur Lösung der gestellten Aufgaben berechnet man zunächst die

Matrix $(\mathfrak{A} - c\,\mathfrak{E})$ und hierzu die reziproke Matrix

$$\mathfrak{Z} = (\mathfrak{A} - c\,\mathfrak{E})^{-1}$$

Die Eigenwerte dieser Matrix $\mathfrak{Z}$ sind

$$\beta_i = \frac{1}{\lambda_i - c} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Wenn β_K der dem Betrage nach grösste dieser Werte ist, so ist

$$\lambda_K = c + \frac{1}{\beta_K} \tag{84}$$

der gesuchte Eigenwert der Matrix $\mathfrak{A}$, der sich von dem gegebenen Wert c nur um den kleinsten Differenzbetrag $\left|\frac{1}{\beta_K}\right|$ unterscheidet.

Falls c selbst ein Eigenwert der Matrix $\mathfrak{A}$ ist, so ist die Determinante $|\mathfrak{A} - c\mathfrak{E}| = 0$. In der zu $(\mathfrak{A} - c\mathfrak{E})$ adjungierten Matrix +) sind dann sämtliche Spalten einander proportional. In diesem Fall erübrigen sich alle weiteren Berechnungen.

Zur Lösung der einzelnen unter a) bis c) formulierten Aufgaben ist noch folgendes zu bemerken.

Zu a): Den grössten Eigenwert β_K der Matrix $\mathfrak{Z}$ findet man in der bekannten Weise, indem man durch wiederholtes Multiplizieren eines Vektors mit der Matrix $\mathfrak{Z}$ oder einer Potenz dieser Matrix die Eigenlösung ξ_K bestimmt. Aus

$$\mathfrak{Z} \cdot \xi_K = \beta_K \xi_K$$

findet man den Wert β_K und aus Gleichung (84) den Wert λ_K, wobei die Gleichung

$$\mathfrak{A} \cdot \xi_K = \lambda_K \xi_K$$

noch zur Kontrolle dienen kann.

Zu b): Nach Berechnung des Eigenwertes $\lambda_K \gtrless c$, der von sämtlichen Eigenwerten λ_i dem Wert c am nächsten liegt, kann man auch den Wert λ_h bestimmen, der den Wert c von der andern Seite her einschliesst.

Die Matrix $\mathfrak{L} = \beta_K \mathfrak{E} - \mathfrak{Z}$ besitzt die Eigenwerte

$$\gamma_i = \beta_K - \beta_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Da β_K der grösste unter den Werten β_i ist, haben die Werte γ_i (von $\gamma_K = 0$ abgesehen) das gleiche Vorzeichen wie β_K. Der grösste Eigenwert der Matrix $\mathfrak{L}$ ist daher

$$\gamma_h = \beta_K - \beta_h ,$$

+) vergl. Seite 96

an β_h der grösste Eigenwert mit entgegengesetztem Vorzeichen der Matrix $\mathfrak{Z}$ ist. Der entsprechende, gesuchte Eigenwert der Matrix $\mathfrak{A}$ ist

$$\lambda_h = c + \frac{1}{\beta_h} = c + \frac{1}{\beta_K - \gamma_h} .$$

Anstelle der Matrix $\mathfrak{Z} = \beta_K \cdot \mathfrak{E} - \mathfrak{Z}$ kann man manchmal zweckmässiger eine andere Matrix benutzen, z.B.

$$\left(\frac{\beta_K}{2} \cdot \mathfrak{E} - \mathfrak{Z}\right) \quad \text{oder} \quad \left(\beta_K \cdot \mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}^2\right)$$

Zu c): Das unter a) angegebene Verfahren zur Berechnung des grössten Eigenwertes der Matrix $\mathfrak{Z} = (\mathfrak{A} - c\mathfrak{E})^{-1}$ setzt allerdings wieder voraus, dass die Spalten der Matrix $\mathfrak{Z}$ wenigstens in grober Annäherung einander proportional sind. (Vergl.Seite 99) Ist das nicht der Fall, so wäre für die Berechnung der Eigenlösung $\mathfrak{x}_K$ und des Eigenwertes β_K bzw. λ_K oft eine sehr umfangreiche Rechenarbeit notwendig.

Oft genügt es jedoch, festzustellen, dass die Matrix $\mathfrak{A}$ innerhalb eines bestimmten Bereichs $c \pm d$ keinen Eigenwert besitzt. Ein solcher Bereich lässt sich mit Hilfe der Matrix $\mathfrak{Z} = (\mathfrak{A} - c\mathfrak{E})^{-1}$ stets angeben, falls nicht c selbst ein Eigenwert der Matrix $\mathfrak{A}$ und folglich die Matrix $\mathfrak{Z}$ unendlich gross ist.

Es sind verschiedene Formeln bekannt, nach denen man den grössten Eigenwert einer Matrix abschätzen kann +):

$$|\lambda_i|_{max} \leqq \sqrt{\sum_{i,K} |a_{iK}^2|} , \tag{85}$$

$$|\lambda_i|_{max} \leqq \left(\sum_{\substack{i=1,2,\dots,n \\ \text{oder } K=1,2,\dots,n}} |a_{iK}|\right)_{max} , \tag{86}$$

$$|\lambda_i|_{max} \leqq n \cdot |a_{iK}|_{max} . \tag{87}$$

Wenn man mit Hilfe einer derartigen Formel feststellt, dass der grösste Eigenwert β_K und mithin sämtliche Eigenwerte der Matrix $\mathfrak{Z}$ dem Betrage nach kleiner sind als ein bestimmter positiver Wert g

$$|\beta_K| < g ,$$

so sind alle Eigenwerte der Matrix $\mathfrak{Z}^{-1} = \mathfrak{A} - c\mathfrak{E}$ dem Betrage nach grösser als der Wert $d = \frac{1}{g}$.

+) Siehe z.B. **Wittmeyer**, Untersuchung des Einflusses der Aenderung einer Matrix ..., Dissert. T.H.Darmstadt 1934; ferner Zeitschr.f. angew.Math.u.Mech.1936, Heft 5.

s ist also für sämtliche Eigenwerte der Matrix $\mathfrak{A}$

$$|\lambda_i - c| > d$$

lso entweder

$$\lambda_i - c < -d \quad , \quad \lambda_i < c-d \quad ,$$

der

$$\lambda_i - c > d \quad , \quad \lambda_i > c+d \quad .$$

.h. sämtliche Eigenwerte der Matrix $\mathfrak{A}$ liegen ausserhalb des ereiches $c \pm d$.

11. Genauere Berechnung eines annähernd bekannten Eigenwertes.

Ein Eigenwert der Matrix $\mathfrak{A}$ sei angenähert, jedoch nicht mit der gewünschten Genauigkeit bekannt. Es sei die Aufgabe gestellt, einen genaueren Wert zu berechnen. Man kann auch für diesen Zweck das soeben beschriebene Verfahren benutzen.

Der bekannte Näherungswert sei λ', der gesuchte Eigenwert sei λ_m; es sei ferner vorausgesetzt, dass λ_m unter sämtlichen Eigenwerten der Matrix $\mathfrak{A}$ derjenige ist, der sich von λ' um den geringsten Differenzbetrag unterscheidet:

$$|\lambda_m - \lambda'| < |\lambda_i - \lambda'| \qquad (i \neq m)$$

Zur Ermittlung des Eigenwertes λ_m und der entsprechenden Eigenlösung $\mathfrak{x}^m$ dient die Matrix

$$\mathfrak{Z} = (\mathfrak{A} - \lambda' \mathfrak{E})^{-1}$$

In ihr besitzt der Anteil der Elementarmatrix $\mathfrak{A}_{om}$ den grössten Eigenwert

$$\beta_m = \frac{1}{\lambda_m - \lambda'}$$

Wird ein Vektor $\mathfrak{z}_o$ mehrmals mit der Matrix $\mathfrak{Z}$ multipliziert, so tritt die Eigenlösung $\mathfrak{x}^m$ immer stärker hervor und kann mit beliebiger Genauigkeit berechnet werden. Voraussetzung hierfür ist nur, dass in dem gewählten Anfangsvektor $\mathfrak{z}_o = \sum \alpha_i \mathfrak{x}^i$ der Anteil der Eigenlösung $\mathfrak{x}^m$ nicht ganz verschwindet. Am zweckmässigsten wählt man natürlich von vornherein für $\mathfrak{z}_o$ einen Vektor $\mathfrak{x}^{m'}$, der bereits ungefähr der gesuchten Eigenlösung proportional ist.

C. Konvergenzbetrachtungen für die in Abschnitt IV behandelten Näherungsverfahren.

Das zuletzt betrachtete Näherungsverfahren steht in einem interssanten Zusammenhang mit den in Abschnitt IV abgeleiteten Verfahren. Dieser Zusammenhang zeigt sich, wenn man auch diese früheren Verfahren in vektorieller Darstellungsweise ausdrückt.

a) Der erste Näherungsschritt.

Der gesuchte Eigenwert λ_m erfüllt mit dem entsprechenden Eigenlösungsvektor ξ^m die Gleichung

$$(\alpha - \lambda_m \beta) \cdot \xi^m = 0 \qquad (88)$$

Bekannt seien die Grössen $\lambda' \approx \lambda_m$ und $\xi' \approx \xi^m$. Diese mögen die Gleichung (88) nicht erfüllen, sondern entsprechend Gleichung (14) den Fehlervektor

$$(\alpha - \lambda' \beta) \cdot \xi' = f \qquad (89)$$

ergeben. Setzt man in diesem Ausdruck $\lambda' = \lambda_m + \delta$, $\xi' = \xi^m + \vartheta$ und subtrahiert die Gleichung (88), so erhält man entsprechend Gleichung (17)

$$(\alpha - \lambda' \beta) \cdot (\xi^m + \vartheta) - (\alpha - \lambda_m \beta) \cdot \xi^m = (\alpha - \lambda' \beta) \cdot \vartheta - \delta \cdot \xi^m = f \qquad (90)$$

Um ϑ und δ näherungsweise zu berechnen, wird zunächst der noch unbekannte Vektor ξ^m durch den bekannten Näherungsvektor ξ' ersetzt. Man findet dann bei der Auflösung des Gleichungssystems statt der genauen Fehler ϑ und δ die angenäherten Fehler ϑ' und δ', welche die Gleichung erfüllen

$$(\alpha - \lambda' \beta) \cdot \vartheta' - \delta' \cdot \xi' = f. \qquad (91)$$

Die heraus errechneten verbesserten Werte für λ_m und ξ^m

$$\lambda'' = \lambda' - \delta' \quad , \quad \xi'' = \xi' - \vartheta'$$

erfüllen also die Gleichung

$$(\alpha - \lambda' \beta)(\xi' - \xi'') - (\lambda' - \lambda'') \cdot \xi' = f. \qquad (92)$$

Da ausserdem

$$(\alpha - \lambda' \beta) \cdot \xi' = f$$

ist, so folgt

$$(\alpha - \lambda' \beta) \cdot \xi'' = -(\lambda' - \lambda'') \xi' = -\delta' \xi'$$

$$\xi'' = -\delta' \cdot (\alpha - \lambda' \beta)^{-1} \cdot \xi' \qquad (93)$$

Die verbesserte Eigenlösung ξ'', zu der man bei Anwendung des Verfahrens IV, 1 gelangt, unterscheidet sich also von dem Vektor

$$(\alpha - \lambda' \beta)^{-1} \cdot \xi'$$

nur durch einen skalaren Faktor.

Es sei noch bemerkt, dass durch die Vektorgleichungen (90) und (91) die Vektoren ϑ bzw. ϑ' nicht eindeutig festgelegt sind. Durch Hinzufügen eines Zusatzvektors in Richtung von ξ_m bzw. ξ'' wird die Gültigkeit der Gleichungen nicht beeinflusst. Aus

$$(\alpha - \lambda' \beta) \cdot \vartheta' - \delta' \xi' = f$$

und

$$(\alpha - \lambda' \beta) \cdot \xi'' + \delta' \xi' = 0$$

folgt allgemein

$$(\alpha - \lambda' \beta) \cdot (\vartheta' + \varepsilon \cdot \xi'') - \delta' \xi' \cdot (1 - \varepsilon) = f \quad .$$

Durch irgend eine willkürliche Festlegung des Vektors ϑ bzw. ϑ' (z.B. durch die zu Beginn von Abschnitt IV getroffene Festsetzung x_n = konst. = 1, also $d_n = 0$) wird also in dem Endergebnis, Gleichung (93), nur der skalare Zahlenfaktor δ bzw. δ' beeinflusst.
Anstelle des Vektors $\xi'' = \xi' - \vartheta'$ erhält man

$$\xi' - (\vartheta' + \varepsilon \xi'') = -\delta'(1-\varepsilon) \cdot (\alpha - \lambda' \beta)^{-1} \cdot \xi'$$

b) Benutzung der verbesserten Eigenlösung.

Wenn man in Gleichung (90) für ξ_m nicht ξ', sondern eine verbesserte Lösung, z.B. $\xi^{(\nu)}$ einsetzt, so erhält man durch Auflösung der Gleichung

$$(\alpha - \lambda' \beta) \cdot \vartheta^{(\nu)} - \xi^{(\nu)} \cdot \delta^{(\nu)} = f$$

die von neuem verbesserte Näherungslösung

$$\xi^{(\nu+1)} = \xi' - \vartheta^{(\nu)} \quad ,$$

die die Gleichung erfüllt

$$(\alpha - \lambda' \beta)(\xi' - \xi^{(\nu+1)}) - (\lambda' - \lambda^{(\nu+1)}) \cdot \xi^{(\nu)} = f \, .$$

Genau wie oben bei der Ableitung der Gleichung (93) findet man

$$\xi^{(\nu+1)} = -\delta^{(\nu)} \cdot (\alpha - \lambda' \beta)^{-1} \cdot \xi^{(\nu)} \qquad (93')$$

Nach den Gleichungen (93) und (93') ist also

$$\xi''' = -\delta'' \cdot (\alpha - \lambda' \beta)^{-1} \cdot \xi''$$
$$= +\delta' \cdot \delta'' \cdot (\alpha - \lambda' \beta)^{-2} \cdot \xi'$$

und allgemein

$$\xi^{(\nu+1)} = (-1)^{\nu} \cdot (\delta' \cdot \delta'' \cdot \ldots \cdot \delta^{(\nu)}) \cdot (\alpha - \lambda' \beta)^{-\nu} \cdot \xi' \qquad (94)$$

worin das Produkt ($\delta' \cdot \delta'' \cdot \ldots \cdot \delta^{(\nu)}$) ein skalarer Faktor ist.

Aus dieser Gleichung (94) erkennt man folgende Konvergenzbedingung für das unter IV, 2 behandelte Näherungsverfahren.

Der Vektor $\mathfrak{x}^{(\nu)}$ nähert sich mit wachsendem ν stets derjenigen Eigenlösung $\mathfrak{x}_m$, deren entsprechender Eigenwert λ_m sich um den kleinsten Differenzbetrag $|\lambda_m - \lambda'|$ von dem Anfangswert λ' unterscheidet, mit folgenden Ausnahmen:

1) Wenn die kleinste Differenz $|\lambda_m - \lambda'|$ im gleichen Betrag bei zwei Eigenwerten auftritt (also z.B. dann, wenn $\lambda' = \frac{1}{2}(\lambda_m + \lambda_{m+1})$, so konvergiert das Verfahren im allgemeinen nicht.

2) Wenn der Anfangsvektor $\mathfrak{x}'$ überhaupt keinen Anteil der gesuchten Eigenlösung $\mathfrak{x}_m$ enthält, so konvergiert das Verfahren entweder überhaupt nicht oder gegen eine in $\mathfrak{x}'$ enthaltene Eigenlösung.

c) <u>Benutzung des verbesserten Eigenwertes.</u>

Wenn man zur weiteren Verbesserung der Näherungswerte $\mathfrak{x}''$ und λ'' entsprechend dem Gleichungssystem (20) die Vektorgleichung

$$(\mathfrak{A} - \lambda^{(\nu)}\mathfrak{E}) \cdot \delta^{(\nu)} - \mathfrak{x}' \cdot \delta^{(\nu)} = \mathfrak{f}$$

benutzt, so gilt für die aus diesem Gleichungssystem errechneten Grössen

$$\mathfrak{x}^{(\nu+1)} = \mathfrak{x}' - \delta^{(\nu)} \quad \text{und} \quad \lambda^{(\nu+1)} = \lambda' - \delta^{(\nu)}$$

die Gleichung

$$(\mathfrak{A} - \lambda^{(\nu)}\mathfrak{E})(\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}^{(\nu+1)}) - (\lambda' - \lambda^{(\nu+1)})\mathfrak{x}' = \mathfrak{f}.$$

Ersetzt man hierin $\mathfrak{f}$ durch den Ausdruck (89), so folgt

$$(\mathfrak{A} - \lambda^{(\nu)}\mathfrak{E})\mathfrak{x}' - (\mathfrak{A} - \lambda^{(\nu)}\mathfrak{E})\mathfrak{x}^{(\nu+1)} - (\lambda' - \lambda^{(\nu+1)})\mathfrak{x}' = (\mathfrak{A} - \lambda'\mathfrak{E})\mathfrak{x}'$$

$$(\lambda^{(\nu+1)} - \lambda^{(\nu)}) \cdot \mathfrak{x}' = (\mathfrak{A} - \lambda^{(\nu)}\mathfrak{E}) \cdot \mathfrak{x}^{(\nu+1)}. \qquad (95)$$

Die Vektoren $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{x}^{(\nu+1)}$ kann man als lineare Zusammensetzungen aus den n Eigenlösungen $\mathfrak{x}_i$ (i = 1, 2, ..., n) darstellen:

$$\mathfrak{x}' = \sum \alpha_i \mathfrak{x}_i \qquad \mathfrak{x}^{(\nu+1)} = \sum \beta_i \mathfrak{x}_i \qquad (96)$$

Die Grösse sämtlicher Eigenlösungen $\mathfrak{x}_i$ sei derart festgelegt, dass die "Richt-Komponente", die in der gesuchten Eigenlösung $\mathfrak{x}_m$ und

deren Näherungsvektoren ξ' , ξ'' , ... konstant = 1 sein soll (z.B. die n=te Komponente x_n bzw. x_n', x_n'', ...), auch bei allen übrigen Eigenlösungsvektoren den Wert 1 hat. Dann folgt aus den Ausdrücken (96), indem man nur deren Richtkomponente betrachtet

$$\Sigma \alpha_i = 1 \quad , \quad \Sigma \beta_i = 1.$$

Ferner folgt aus Gleichung (95) :

$$\left(\lambda^{(\nu+1)} - \lambda^{(\nu)}\right) \cdot \Sigma \alpha_i \xi_i = \Sigma \left(\lambda_i - \lambda^{(\nu)}\right) \beta_i \xi_i$$

und, da jede Seite diese Gleichung eindeutig in die n Eigenlösungen zerlegt werden kann:

$$\left(\lambda^{(\nu+1)} - \lambda^{(\nu)}\right) \alpha_i \xi_i = \left(\lambda_i - \lambda^{(\nu)}\right) \cdot \beta_i \xi_i$$

$$\beta_i = \left(\lambda^{(\nu+1)} - \lambda^{(\nu)}\right) \cdot \frac{\alpha_i}{\lambda_i - \lambda^{(\nu)}}$$

$$\xi^{(\nu+1)} = \Sigma \beta_i \xi_i = \left(\lambda^{(\nu+1)} - \lambda^{(\nu)}\right) \cdot \Sigma \frac{\alpha_i}{\lambda_i - \lambda^{(\nu)}} \cdot \xi_i$$

Für die Richtkomponente ergibt sich also die Gleichung

$$\left(\lambda^{(\nu+1)} - \lambda^{(\nu)}\right) \cdot \Sigma \frac{\alpha_i}{\lambda_i - \lambda^{(\nu)}} = \Sigma \beta_i = 1$$

$$\lambda^{(\nu+1)} = \lambda^{(\nu)} + \frac{1}{\sum \frac{\alpha_i}{\lambda_i - \lambda^{(\nu)}}} \qquad (97)$$

Die Näherungswerte λ', λ'', ..., $\lambda^{(\nu)}$, $\lambda^{(\nu+1)}$, ... können nur dann gegen einen bestimmten Eigenwert λ_m konvergieren, wenn für die nächste Umgebung des Wertes λ_m der Differentialquotient $\frac{d\lambda^{(\nu+1)}}{d\lambda^{(\nu)}}$ dem Betrage nach kleiner als 1 ist; denn nur dann ist für beliebig kleine Differenzen die Konvergenzbedingung $|\lambda^{(\nu+1)} - \lambda^{(\nu)}| < |\lambda^{(\nu)} - \lambda^{(\nu-1)}|$ erfüllt.

Durch Differentiieren der Gleichung (97) erhält man

$$\frac{d\lambda^{(\nu+1)}}{d\lambda^{(\nu)}} = 1 - \frac{\sum_i \frac{\alpha_i}{(\lambda_i - \lambda^{(\nu)})^2}}{\left(\sum_i \frac{\alpha_i}{\lambda_i - \lambda^{(\nu)}}\right)^2} = 1 - \frac{\sum_i \alpha_i \left(\frac{\lambda_m - \lambda^{(\nu)}}{\lambda_i - \lambda^{(\nu)}}\right)^2}{\left(\sum \alpha_i \frac{\lambda_m - \lambda^{(\nu)}}{\lambda_i - \lambda^{(\nu)}}\right)^2} \qquad (98)$$

Für $\lambda^{(\nu)} \longrightarrow \lambda_m$ ist für $i \neq m$

$$\lim \left(\frac{\lambda_m - \lambda^{(\nu)}}{\lambda_i - \lambda^{(\nu)}}\right) = 0$$

und für $i = m$

$$\frac{\lambda_m - \lambda^{(\nu)}}{\lambda_i - \lambda^{(\nu)}} = 1 \ .$$

Es ist daher

$$\lim \frac{d\lambda^{(\nu+1)}}{d\lambda^{(\nu)}} = 1 - \frac{\alpha_m}{\alpha_m^2} = \frac{\alpha_m - 1}{\alpha_m} \qquad (99)$$

Eine Konvergenz gegen den Wert λ_m ist also nur dann möglich, wenn

$$-1 < \frac{\alpha_m - 1}{\alpha_m} < 1,$$

oder, anders ausgedrückt, wenn

$$\tfrac{1}{2} < \alpha_m < \infty . \qquad (100)$$

Wenn der Vektor $\mathfrak{z}'$ annähernd der Eigenlösung $\mathfrak{z}_m$ proportional ist, so ist meistens $\alpha_m \approx 1$, während alle übrigen α_i meistens kleiner als $1/2$ sein werden. In solch einem Fall ist λ_m der einzige Eigenwert, gegen den die Rechnung konvergieren kann; man wird dann selbst bei Benutzung eines sehr ungenauen Anfangswertes λ' fast immer (z.B.stets, wenn $|\lambda_{m-1}| > |\lambda'| > |\lambda_{m+1}|$) zu dem Eigenwert λ_m gelangen.

Bemerkenswert ist noch folgendes: Man wird, um die Konvergenz möglichst zu beschleunigen, danach streben, dass α_m möglichst gross, die übrigen α_i dagegen möglichst klein sind. Man kann hier-zu oft dadurch beitragen, dass man die grösste Komponente des bekannten Näherungsvektors als Richtkomponente wählt und gleich 1 setzt. Auch in dem auf Seite durchgeführten Beispiel kann man die Annäherung beschleunigen, indem man statt der dritten die zweite Komponente als Richtkomponente wählt und $\mathfrak{z}' = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 1 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$ setzt.

Anhang.

Die Berechnung der reziproken Matrix.

Für die Berechnung der reziproken Matrix $\mathfrak{A}^{-1}$ können verschiedene Wege benutzt werden.

1. Man berechnet durch Ausmultiplizieren der n^2 Unterdeterminanten (n-1)ter Ordnung die "Adjungierte" der Matrix $\mathfrak{A}$

$$\bar{\mathfrak{A}} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & & A_{nn} \end{pmatrix} \qquad (101)$$

worin A_{ik} das algebraische Komplement des Elementes a_{ik} ist. Dann ist bekanntlich

$$\bar{\mathfrak{A}} \cdot \mathfrak{A} = \mathfrak{A} \cdot \bar{\mathfrak{A}} = D \cdot \mathfrak{E}$$

also

$$\mathfrak{A}^{-1} = \frac{1}{D} \cdot \bar{\mathfrak{A}} .$$

Für die oben beschriebene Berechnung der Elementarmatrizen bzw. Eigenlösungen ist ein skalarer Faktor, mit dem die Matrix $\mathfrak{A}^{-1}$ multipliziert ist, bedeutungslos. Man kann statt $\mathfrak{A}^{-1}$ auch unmittelbar die zu $\mathfrak{A}$ adjungierte Matrix $\bar{\mathfrak{A}}$ benutzen.

Im Falle n = 2 ist zur Aufstellung der Matrix $\bar{\mathfrak{A}} = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$ überhaupt keine Rechnung nötig. Im Fall n = 3 sind 9 Unterdeterminanten zweiter Ordnung, also im allgemeinen 18 Produkte zu berechnen. Im Fall $n \geq 4$ ist dieser Weg jedoch nicht zu empfehlen, denn die Berechnung der n^2 Unterdetermimanten (n-1)ter Ordnung würde einen sehr grossen Arbeitsaufwand erfordern. Man kann zwar durch systematische Anordnung der Rechnung die Anzahl der Multiplikationen wesentlich einschränken, indem man z.B. erst die zweireihigen Unterdeterminanten zweier Zeilen, hieraus die dreireihigen Unterdeterminanten dreier Zeilen berechnet usf. Aber die Rechnung wird hierdurch unübersichtlich; ausserdem sind auch dann für die Berechnung der n^2 Unterdeterminanten (n-1)-ter Ordnung immerhin $6\,n \cdot (2^{n-2} - 1)$ Produkte auszumultiplizieren,
also für

n = 2	3	4	5	6	7	8
0	18	72	210	540	1302	3024

Produkte aus je 2 Faktoren; während bei dem folgenden Eliminationsverfahren nur insgesamt n^3 Multiplikationen und Divisionen erforderlich sind.

2.) Bei vier- oder mehrreihigen Matrizen benutzt man zur Berechnung der reziproken Matrix in der Regel am besten ein Eliminationsverfahren.

Eine zweckmässige Anordnung der Rechnung und der hierzu erforderliche Arbeitsaufwand soll an einem Zahlenbeispiel gezeigt werden.

Beispiel:

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 10 & 8 & -7 & -8 \\ 6 & 4 & -3 & -6 \\ 3 & -3 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix}, \qquad \text{gesucht:} \quad \mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \mathfrak{A}^{-1} \cdot \mathfrak{r}.$$

$\cdot x_1$	$\cdot x_2$	$\cdot x_3$	$\cdot x_4$	$\cdot r_1$	$\cdot r_2$	$\cdot r_3$	$\cdot r_4$	Anzahl d. erford. Multipl.	Divis.
10	8	-7	-8	1					
6	4	-3	-6		1				
3	-3	4	-3			1			
3	5	-4	-1				1		
1	0,8	-0,7	-0,8	0,1					n
	-0,8	1,2	-1,2	-0,6	1				
	-5,4	6,1	-0,6	-0,3		1		(n-1).n	
	2,6	-1,9	1,4	-0,3			1		
	1	-1,5	1,5	0,75	-1,25				n
		-2,0	7,5	3,75	-6,75	1		2 · n	
		2,0	-2,5	-2,25	3,25		1		
		1	-3,75	-1,875	3,375	-0,5			n
			5,0	1,5	-3,5	1	1	1 . n	
			1	0,3	-0,7	0,2	0,2		n
		1		-0,75	0,75	0,25	0,75	1 . n	
	1			-0,825	0,925	0,075	0,825	2.n	
1				0,475	0,775	0,275	0,025	(n-1).n	
								$n^2(n-1)+n^2 = n^3$	

Die gesuchte reziproke Matrix ist also

$$\mathfrak{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}475 & -0{,}775 & 0{,}275 & 0{,}025 \\ -0{,}825 & 0{,}925 & 0{,}075 & 0{,}825 \\ -0{,}75 & 0{,}75 & 0{,}25 & 0{,}75 \\ 0{,}3 & -0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix}$$

Die für diese Rechnung erforderliche Anzahl von Multiplikationen und Divisionen beträgt, wie man leicht erkennt, n^3.

3.) Wenn die Elemente einer gegebenen Matrix $\mathfrak{A}$ vielstellige oder irrationale Zahlen sind, oder wenn die benutzten rechnerischen Hilfsmittel (z.B.Rechenschieber) nur die Berücksichtigung einer geringen Stellenzahl gestatten, so ist es oft nicht möglich, die Matrix $\mathfrak{A}^{-1}$ mit absoluter Genauigkeit zu berechnen. Die errechnete Matrix $\mathfrak{Z} \approx \mathfrak{A}^{-1}$ wird um ein Geringes von der genauen reziproken Matrix $\mathfrak{A}^{-1}$ abweichen. Man kann dann die Genauigkeit der Matrix $\mathfrak{Z}$ nachprüfen, indem man mit $\mathfrak{A}$ multipliziert.

Ist $\mathfrak{Z} = \mathfrak{A}^{-1}$, so ist $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{Z} = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{E}$. Ist jedoch $\mathfrak{Z}$ von $\mathfrak{A}^{-1}$ verschieden, so ist

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{Z} = \mathfrak{E} - \mathfrak{v} \qquad (102)$$

wobei im allgemeinen sämtliche Elemente der Matrix $\mathfrak{v}$ sehr klein ($\ll 1$) sein werden. Aus Gleichung (102) folgt dann

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{A}^{-1} \cdot (\mathfrak{E} - \mathfrak{v}) = \mathfrak{A}^{-1} - \mathfrak{A}^{-1} \cdot \mathfrak{v}$$

also

$$\mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{Z} + \mathfrak{A}^{-1} \cdot \mathfrak{v}. \qquad (103)$$

Diese Gleichung kann man benutzen, um $\mathfrak{A}^{-1}$ genauer zu berechnen, indem man auf der rechten Seite der Gleichung $\mathfrak{A}^{-1}$ durch die bekannte, angenäherte Matrix $\mathfrak{Z}$ ersetzt:

$$\mathfrak{A}^{-1} \approx \mathfrak{Z} + \mathfrak{Z} \cdot \mathfrak{v} = \mathfrak{Z} \cdot (\mathfrak{E} + \mathfrak{v}) \qquad (104)$$

Eine weitere Verbesserung der Genauigkeit ist aufgrund folgender Ueberlegung möglich. Es ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z} &= \mathfrak{A}^{-1} \cdot (\mathfrak{E} - \mathfrak{v}) \\ \mathfrak{Z} \cdot (\mathfrak{E} + \mathfrak{v}) &= \mathfrak{A}^{-1} \cdot (\mathfrak{E} - \mathfrak{v}) \cdot (\mathfrak{E} + \mathfrak{v}) = \mathfrak{A}^{-1} (\mathfrak{E} - \mathfrak{v}^2) \\ \mathfrak{Z} \cdot (\mathfrak{E} + \mathfrak{v}) \cdot (\mathfrak{E} + \mathfrak{v}^2) &= \mathfrak{A}^{-1} \cdot (\mathfrak{E} - \mathfrak{v}^2)(\mathfrak{E} + \mathfrak{v}^2) = \mathfrak{A}^{-1} \cdot (\mathfrak{E} - \mathfrak{v}^4) \\ \mathfrak{Z} \cdot (\mathfrak{E} + \mathfrak{v}) \cdot (\mathfrak{E} + \mathfrak{v}^2) \cdot (\mathfrak{E} + \mathfrak{v}^4) &= \mathfrak{A}^{-1} \cdot (\mathfrak{E} - \mathfrak{v}^4) \cdot (\mathfrak{E} + \mathfrak{v}^4) = \mathfrak{A}^{-1} \cdot (\mathfrak{E} - \mathfrak{v}^8) \end{aligned} \qquad (105)$$

Wenn man also die Matrix $\mathfrak{Z}$ der Reihe nach mit $(\mathfrak{E}+\mathfrak{v})$, $(\mathfrak{E}+\mathfrak{v}^2)$, $(\mathfrak{E}+\mathfrak{v}^4)$, ... multipliziert, so wird man sich im allgemeinen rasch bis zu jeder gewünschten Genauigkeit der genauen reziproken Matrix $\mathfrak{A}^{-1}$ nähern.

Vorbedingung für die Konvergenz dieses Näherungsverfahrens ist, dass die Elemente der Matrix $\mathfrak{v}$ hinreichend klein sind.

Das genaue Konvergenzkriterium besteht darin, dass sämtliche Eigenwerte der Matrix $\mathfrak{v}$ dem Betrage nach kleiner als 1 sein müssen. Falls der grösste Eigenwert der Matrix $\mathfrak{v}$ gleich 1 ist, so wird die Reihe (105) zwar ebenfalls konvergieren, aber nicht nach der gesuchten Matrix $\mathfrak{A}^{-1}$, sondern nach der Matrix $\mathfrak{A}^{-1}\cdot(\mathfrak{E}-\mathfrak{v}_{01})$, wenn $\mathfrak{v}_{01}$ diejenige Elementarmatrix der Matrix $\mathfrak{v}$ ist, die ihrem grössten Eigenwert, nämlich dem Eigenwert 1 entspricht.

Die Konvergenz des Näherungsverfahrens ist ferner auch dann sichergestellt, wenn entweder in der Matrix $\mathfrak{v}$ oder einer ihrer Potenzen $\mathfrak{v}^2$, $\mathfrak{v}^4$, ... die Summe der Beträge der Elemente jeder Zeile oder jeder Spalte kleiner als 1 ist, oder wenn in einer dieser Matrizen die aus den Beträgen errechneten Quadratsumme sämtlicher Elemente kleiner als 1 ist.+)

Zahlenbeispiel:

Die Reziproke der Matrix $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 0 \\ 10 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ beträgt

$$\mathfrak{A}^{-1} = -\frac{1}{90}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -10 & 20 \\ -10 & 10 & -20 \\ 20 & -20 & -50 \end{pmatrix}$$

Es sei jedoch angenommen, diese Matrix $\mathfrak{A}^{-1}$ sei nur angenähert bekannt, z.B.

$$\mathfrak{Z} = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}1 & -0{,}2 \\ 0{,}1 & -0{,}1 & 0{,}2 \\ -0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

Die Multiplikation mit der Matrix $\mathfrak{A}$ ergibt

$$\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{Z} = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 0 \\ 10 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0{,}1 & -0{,}2 \\ 0{,}1 & -0{,}1 & 0{,}2 \\ -0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}0 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}9 & -0{,}2 \\ 0 & 0 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

Es ist also

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{E} - \mathfrak{A}\cdot\mathfrak{Z} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 0{,}2 \end{pmatrix}$$

+) Vgl. Fussnote Seite 116.

Die verbesserte reziproke Matrix beträgt nach Gleichung (104)

$$\mathfrak{x} + \mathfrak{x} \cdot \mathfrak{v} = \mathfrak{x} \cdot (\mathfrak{e} + \mathfrak{v}) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0{,}1 & -0{,}2 \\ 0{,}1 & -0{,}1 & 0{,}2 \\ -0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0{,}1 & 1{,}1 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 1{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}01 & 0{,}11 & -0{,}22 \\ 0{,}11 & -0{,}11 & 0{,}22 \\ -0{,}22 & 0{,}22 & 0{,}52 \end{pmatrix}$$

Zur weiteren Verbesserung der Genauigkeit nach der Formelreihe(105) müssen die betreffenden Potenzen der Matrix $\mathfrak{v}$ berechnet werden. Man findet

$$\mathfrak{v}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0{,}01 & +0{,}01 & 0{,}06 \\ 0 & 0 & 0{,}04 \end{pmatrix}$$

und hieraus

$$\mathfrak{x}(\mathfrak{e}+\mathfrak{v})(\mathfrak{e}+\mathfrak{v}^2) = \begin{pmatrix} -0{,}0111 & 0{,}1111 & -0{,}2222 \\ 0{,}1111 & -0{,}1111 & 0{,}2222 \\ -0{,}2222 & 0{,}2222 & 0{,}554 \end{pmatrix} .$$

VIII. Näherungsverfahren zur gleichzeitigen Verbesserung sämtlicher Eigenlösungen und Eigenwerte.

Das folgende Näherungsverfahren kann angewandt werden, wenn sämtliche Eigenwerte und Eigenlösungen einer Matrix bereits angenähert, jedoch nicht mit ausreichender Genauigkeit bekannt sind.

Der Grundgedanke ist folgender: Jede der angenäherten Eigenlösungen

$$\xi_1' \,,\ \xi_2' \,,\ \ldots \,,\ \xi_n'$$

kann als lineare Zusammensetzung der n genauen Eigenlösungen dargestellt werden:

$$\xi_i' = \alpha_{i1}\xi_1 + \alpha_{i2}\xi_2 + \ldots + \alpha_{ii}\xi_i + \ldots + \alpha_{in}\xi_n \,. \qquad (106)$$

Unter diesen n Komponenten wird $\alpha_{ii}\xi_i$ bei weitem die grösste sein. Die übrigen Komponenten sind als Korrekturglieder zu betrachten; wenn es gelingt, die Koeffizienten α_{ik} $(k = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n)$ einigermassen genau zu ermitteln, so kann man für ξ_k $(k \neq i)$ die bekannten Näherungslösungen einsetzen und erhält für ξ_i den verbesserten Näherungswert

$$\xi_i'' = \xi_i' - \sum_{k \neq i} \alpha_{ik}\,\xi_k' \qquad (107)$$

Die Koeffizienten α_{ik} findet man angenähert in folgender Weise:

Der Vektor $\mathfrak{A}\cdot\xi_i'$ ist annähernd proportional ξ_i' :

$$\mathfrak{A}\cdot\xi_i' \approx \lambda_i'\cdot\xi_i' \,.$$

Man berechnet den Differenzvektor

$$\mathfrak{A}\cdot\xi_i' - \lambda_i'\xi_i' = (\mathfrak{A} - \lambda_i'\mathfrak{E})\cdot\xi_i' = \mathfrak{d}_i \qquad (108)$$

In dieser Gleichung kann man ξ_i' durch den Ausdruck (106) ersetzen; unter Berücksichtigung von Gleichung (1') Seite 55 erhält man

$$\mathfrak{d}_i = (\lambda_1 - \lambda_i')\cdot\alpha_{i1}\xi_1 + (\lambda_2 - \lambda_i')\cdot\alpha_{i2}\xi_2 + \ldots + (\lambda_i - \lambda_i')\cdot\alpha_{ii}\xi_i + \ldots + (\lambda_n - \lambda_i')\alpha_n\xi_n \qquad (109)$$

In dieser Vektorgleichung sind angenähert bekannt:

Die n Eigenlösungsvektoren $\xi_k \approx \xi_k'$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$,

die (n-1) Differenzen $(\lambda_k - \lambda_i') \approx (\lambda_k' - \lambda_i')$ $(k \neq i)$

der Koeffizient $\alpha_{ii} \approx 1$

Die Gleichung (109) enthält also n lineare Gleichungen für die Unbekannten α_{ik} $(k \neq i)$ und die kleine Differenz $(\lambda_i - \lambda_i')$.

Man kann die Gleichung (109) auch unter Verwendung der aus den angenäherten Eigenspalten gebildeten Matrix $\mathcal{H}' = (\xi_1' \; \xi_2' \; \dots \; \xi_n')$ auch in folgender Form schreiben

$$\eta_i \approx \mathcal{H}' \cdot \begin{pmatrix} (\lambda_1 - \lambda_i') \cdot \alpha_{i1} \\ (\lambda_2 - \lambda_i') \cdot \alpha_{i2} \\ \dots \\ (\lambda_n - \lambda_i') \cdot \alpha_{in} \end{pmatrix} . \qquad (110)$$

Falls auch die Matrix der Eigenzeilen $\mathcal{Y}' = \mathcal{H}'^{-1}$ angenähert bekannt ist, so kann man unmittelbar die Lösung der Gleichung(110) angeben:

$$\begin{pmatrix} (\lambda_1 - \lambda_i') \cdot \alpha_{i1} \\ (\lambda_2 - \lambda_i') \cdot \alpha_{i2} \\ \dots \\ (\lambda_n - \lambda_i') \cdot \alpha_{in} \end{pmatrix} \approx \mathcal{Y}' \cdot \eta_i . \qquad (111)$$

Die Komponenten dieses Vektors muss man dann noch durch die angenähert bekannten Faktoren $(\lambda_k - \lambda_i')$ $(k \neq i)$ dividieren und erhält die gesuchten Koeffizienten α_{ik}, mit deren Hilfe man nach Gleichung (107) die verbesserte Eigenlösung ξ_i'' errechnen kann.

Bisher wurde gezeigt, wie man <u>einen</u> Näherungsvektor ξ_i' mit Hilfe der übrigen, annähernd bekannten Eigenlösungsvektoren verbessert. Der wichtigste Vorteil dieses Verfahrens ist aber gerade, dass man in einem Rechnungsgang mit verhältnismässig geringem Mehraufwand an Rechenarbeit sämtliche Eigenlösungen und Eigenwerte gleichzeitig verbessern kann. Wie man hierbei vorgeht, soll an dem folgenden Zahlenbeispiel gezeigt werden:

<u>Zahlenbeispiel</u>:
Gegeben die Matrix $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 0 \\ 10 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Bekannt seien die angenäherten Eigenlösungen

$$\xi_1' = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \xi_2' = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \xi_3' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H}' = \begin{pmatrix} 10 & 3 & -1 \\ 8 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} .$$

Diese drei Vektoren bleiben bei der Multiplikation mit der Matrix $\mathcal{A}$ in mehr oder weniger grober Annäherung sich selbst proportional:

$$\begin{pmatrix} 10 & 10 & 0 \\ 10 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 3 & -1 \\ 8 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180 & -10 & 0 \\ 142 & 14 & 3 \\ 17 & -6 & 6 \end{pmatrix}$$

Aus dem Verhältnis der Vektoren $(\mathfrak{A}\cdot\xi_i')$: ξ_i' findet man für die drei Eigenwerte rund

$$\lambda_1' = 18 \qquad \lambda_2' = -3{,}5 \qquad \lambda_3' = 1{,}5 \ .$$

Von jeder Spalte der Matrix $\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{X}'$ wird das λ_i' =fache der entsprechenden Spalte von $\mathfrak{X}'$ abgezogen:

$$\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{X}' - \begin{pmatrix} \lambda_1' & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2' & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3' \end{pmatrix}\cdot\mathfrak{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 & 1{,}5 \\ -2 & 0 & 1{,}5 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathfrak{v}$$

Die Spalten dieser Matrix $\mathfrak{v}$ sind die nach Gleichung (108) zu berechnenden Vektoren $\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_n$.

Die Koeefizienten $(\lambda_K - \lambda_i')\cdot\alpha_{iK}$ können ebenfalls in einer Matrix zusammengestellt werden; entsprechend der Gleichung (111) gilt

$$\begin{pmatrix} (\lambda_1-\lambda_1')\cdot\alpha_{11} & (\lambda_1-\lambda_2')\cdot\alpha_{21} & \ldots & (\lambda_1-\lambda_n')\cdot\alpha_{n1} \\ (\lambda_2-\lambda_1')\cdot\alpha_{12} & (\lambda_2-\lambda_2')\cdot\alpha_{22} & \ldots & (\lambda_2-\lambda_n')\cdot\alpha_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (\lambda_n-\lambda_1')\cdot\alpha_{1n} & (\lambda_n-\lambda_2')\cdot\alpha_{2n} & \ldots & (\lambda_n-\lambda_n')\cdot\alpha_{nn} \end{pmatrix} = \mathfrak{y}'\cdot\mathfrak{v} \qquad (112)$$

Die einzelnen Elemente dieser Matrix sind die Produkte aus den Zeilen der Matrix $\mathfrak{y}'$, also aus den angenäherten Eigenzeilen $\mathfrak{y}_K'$ (K = 1, 2, ..., n), mit den Spalten der Matrix $\mathfrak{v}$, also den in Gleichung (108) definierten Vektoren $\mathfrak{v}_i = \mathfrak{A}\cdot\xi_i' - \lambda_i'\cdot\xi_i'$:

$$(\lambda_K - \lambda_i')\cdot\alpha_{iK} = \mathfrak{y}_K'\cdot(\mathfrak{A}\xi_i' - \lambda_i'\xi_i') \qquad (113)$$

Im obigen Zahlenbeispiel ist

$$\mathfrak{y}' = \begin{pmatrix} 10 & 3 & -1 \\ 8 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{293}\cdot\begin{pmatrix} -18 & -14 & -1 \\ -31 & 41 & -18 \\ 20 & -17 & -64 \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{y}'\cdot\mathfrak{v} = \frac{1}{293}\cdot\begin{pmatrix} 18 & 14 & 1 \\ 31 & -41 & 18 \\ -20 & 17 & 64 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 & 1{,}5 \\ -2 & 0 & 1{,}5 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{293}\cdot\begin{pmatrix} -29 & 10 & 48 \\ 64 & 33{,}5 & -15 \\ -98 & 54 & -4{,}5 \end{pmatrix}$$

Die Diagonalelemente dieser Matrix $\mathfrak{y}'\cdot\mathfrak{v}$ sind gleich $(\lambda_i - \lambda_i')\cdot\alpha_{ii}$ worin $\alpha_{ii} \approx 1$. Man findet daher für λ_i (i = 1, 2, 3) die verbesserten Näherungswerte

$$\lambda_1'' = \lambda_1' - \frac{29}{293} = 18 - 0{,}0990 = 17{,}9010 \ ,$$

$$\lambda_2'' = \lambda_2' + \frac{33{,}5}{293} = -3{,}5 + 0{,}1143 = -3{,}3857 \ ,$$

$$\lambda_3'' = \lambda_3' - \frac{4{,}5}{293} = 1{,}5 - 0{,}0154 = 1{,}4846 \ .$$

Die gleichen Näherungswerte λ_i'' findet man übrigens, wenn die Vektoren ξ_i' und y_i' bekannt sind, auch unmittelbar aus der Beziehung

$$\lambda_i'' = y_i' \cdot (A \cdot \xi_i') \,. \tag{114}$$

Denn aus Gleichung (113) folgt für i = k

$$(\lambda_i - \lambda_i') \cdot \alpha_{ii} = y_i' \cdot (A \cdot \xi_i' - \lambda_i' \xi_i')$$
$$= y_i' \cdot (A \cdot \xi_i') - \lambda_i' \cdot \xi_i' \cdot y_i'$$

also infolge $\alpha_{ii} \approx 1$ und $\xi_i' \cdot y_i' = 1$

$$\lambda_i'' - \lambda_i' = y_i' \cdot (A \cdot \xi_i') - \lambda_i'$$
$$\lambda_i'' = y_i' \cdot (A \xi_i') \,.$$

Aus den übrigen Elementen der Matrix $y' \cdot v$, die nach Gleichung (112) gleich

$$(\lambda_K - \lambda_i') \cdot \alpha_{iK}$$

sind, kann man, indem man auch für λ_K den bekannten Näherungswert λ_K' einsetzt, näherungsweise die gesuchten Koeffizienten α_{iK} und nach Gleichung (107) die verbesserten Eigenlösungsvektoren ξ_i'' berechnen.

In dem betrachteten Zahlenbeispiel findet man

$$\alpha_{12} = \frac{64}{293 \cdot (\lambda_2' - \lambda_1')} = \frac{64}{293 \cdot (-21{,}5)} = -\,0{,}01016$$

$$\alpha_{13} = \frac{-98}{293 \cdot (\lambda_3' - \lambda_1')} = \frac{-98}{293 \cdot (-16{,}5)} = +\,0{,}02028$$

$$\xi_1'' = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + 0{,}01016 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} - 0{,}02028 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10{,}05076 \\ 7{,}93908 \\ 0{,}93920 \end{pmatrix},$$

und ebenso für die beiden anderen Eigenlösungen

$$\xi_2'' = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{48}{293 \cdot 21{,}5} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{54}{293 \cdot 5{,}0} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}0210 \\ -4{,}0496 \\ 1{,}8510 \end{pmatrix},$$

$$\xi_3'' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{48}{293 \cdot 16{,}5} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-45}{293 \cdot (-5)} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}1301 \\ 0{,}9614 \\ 3{,}9696 \end{pmatrix}.$$

Durch Multiplikation dieser drei verbesserten Eigenlösungsvektoren $\mathfrak{x}_1''$, $\mathfrak{x}_2''$, $\mathfrak{x}_3''$ mit der Matrix $\mathfrak{A}$ überzeugt man sich leicht von der gegenüber den ersten Näherungen $\mathfrak{x}_1'$, $\mathfrak{x}_2'$, $\mathfrak{x}_3'$ wesentlich erhöhten Genauigkeit.

Beispiel:

$\mathfrak{x}_i'$	$\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{x}_i'$	Quotienten	$\mathfrak{x}_i''$	$\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{x}_i''$	Quotienten
10	180	18,0	10,05076	179,8984	17,8990
8	142	17,75	7,93908	142,0814	17,8965
1	17	17,0	0,93920	16,8174	17,906

Vereinfachung für symmetrische Matrizen.

Für $\mathfrak{y}'$ kann man in Gleichung (112) anstelle der Matrix $\mathfrak{X}'^{-1}$ auch eine beliebige andere Matrix einsetzen, deren Zeilen $\mathfrak{y}_i'$ angenähert mit den Eigenzeilen $\mathfrak{y}_i$ der gegebenen Matrix $\mathfrak{A}$ übereinstimmen

$$\mathfrak{A}^*\cdot\mathfrak{y}_i' \approx \lambda_i\cdot\mathfrak{y}_i' \tag{115}$$

(worin $\mathfrak{A}^*$ die Transponierte von $\mathfrak{A}$ ist) und ausserdem die Bedingung erfüllen

$$\mathfrak{x}_i'\cdot\mathfrak{y}_i' = 1 \tag{116}$$

Ist $\mathfrak{A}$ eine symmetrische Matrix, so kann man daher mit Hilfe der Matrix $\mathfrak{X}' \approx \mathfrak{X}$ eine für die obige Rechnung brauchbare Matrix $\mathfrak{y}' \approx \mathfrak{X}^{-1}$ bestimmen, indem man die einzelnen angenäherten Eigenlösungsvektoren $\mathfrak{x}_i'$ durch das Quadrat ihrer Länge dividiert und als Zeilen in die Matrix $\mathfrak{y}'$ einführt:

$$\mathfrak{y}_i' = \frac{1}{|\mathfrak{x}_i'|^2}\cdot\mathfrak{x}_i' = c_i\cdot\mathfrak{x}_i' \tag{117}$$

Die aus diesen Zeilen gebildete Matrix $\mathfrak{y}'$ erfüllt die beiden Forderungen (115) und (116); denn bei einer symmetrischen Matrix ist $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A}$ und

$$\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{y}_i' = \mathfrak{A}\cdot c_i\cdot\mathfrak{x}_i' \approx \lambda_i\cdot c_i\cdot\mathfrak{x}_i' = \lambda_i\cdot\mathfrak{y}_i'$$

und ferner

$$\mathfrak{x}_i'\cdot\mathfrak{y}_i' = \mathfrak{x}_i'\cdot\frac{\mathfrak{x}_i'}{|\mathfrak{x}_i'|^2} = 1$$

Man kann übrigens auch den Eigenlösungsvektoren allgemein die Länge 1 zuteilen, indem man jeden ermittelten Lösungsvektor durch seine Länge dividiert. Dann ist $(\xi_i')^2 = 1$, folglich bei einer symmetrischen Matrix $\eta_i' = \xi_i'$, und somit

$$\eta' = (\mathcal{H}')^*.$$

Der erforderliche Arbeitsaufwand.

Das beschriebene Verfahren erfordert folgende Multiplikationen und Divisionen:

1.) Multiplikation $\mathcal{A} \cdot \mathcal{H}'$: n^3 Produkte aus je zwei Zahlen.

2.) Berechnung der Matrix ϑ aus den n Spalten
$\vartheta_i = \mathcal{A} \cdot \xi_i' - \lambda_i' \xi_i'$: n^2 Produkte der Komponenten von ξ_i' mit λ_i' $(i=1,\dots,n)$

3.) Berechnung der Matrix
$\eta' = (\mathcal{H}')^{-1}$: n^3 Multiplikationen und Divisionen.

(oder, nur bei symmetrischen Matrizen: Bestimmung einer Matrix $\eta' \approx \mathcal{H}^{-1}$ durch Transposition der Matrix $\mathcal{H}'$ und Division der einzelnen Vektoren ξ_i' durch $(\xi_i')^2$: n^2 Multiplikationen + n^2 Divisionen)

4.) Multiplikation $\eta' \cdot \vartheta$: n^3 Multiplikationen.

(wenn nur die Eigen<u>lösungen</u> berechnet werden sollen, brauchen die Diagonalelemente nicht berechnet zu werden; es genügen $n^3 - n^2$ Multiplikationen.)

5.) Division der Elemente $(i \neq k)$ der Matrix $\eta' \cdot \vartheta$ durch $(\lambda_k' - \lambda_i')$: $n\,(n-1)$ Divisionen

6.) Berechnung der n verbesserten Eigenlösungsvektoren
$\xi_i'' = \xi_i' - \sum_{k \neq i} \alpha_{ik} \xi_k'$: $n^2 \cdot (n-1)$ Multiplikationen.

Berücksichtigt man noch, dass in den Vektoren $\mathfrak{x}_i$, wie es im obigen Zahlenbeispiel geschehen ist, je eine Komponente auf den Wert Null gebracht werden kann, so ergeben sich unter 2) statt n^2 Multiplikationen:

n Divisionen und $n^2 - n$ Multiplikationen,

und unter 4) statt n^3 bzw. $n^3 - n^2$ Multiplikationen:

$n^2 (n-1)$ bzw. $n (n-1)^2$ Multiplikationen.

Unter dieser Voraussetzung sind für die Berechnung der n verbesserten Eigenlösungen $\mathfrak{x}_i''$ insgesamt erforderlich:

bei einer unsymmetrischen Matrix: $4 n^3 - n^2$ Multiplikationen und Divisionen,

bei einer symmetrischen Matrix : $3 n^3 + n^2$ Multiplikationen und Divisionen.

Die Anzahl der erforderlichen Multiplikationen ist demnach hier, verglichen mit anderen Verfahren (besonders mit den Näherungsverfahren nach Abschnitt IV) verhältnismässig gross. Trotzdem ist die Anwendung dieses Verfahrens unter Umständen vorteilhaft, besonders deswegen, weil der grösste Teil der Rechenarbeit im Multiplizieren von Matrizen und ähnlichen Arbeiten besteht, die besonders bei Verwendung einer Rechenmaschine verhältnismässig rasch und bequem durchgeführt werden können.

IX. MEHRFACHE EIGENWERTE.

Einem Teil der bisherigen Betrachtungen wurde die meistens zutreffende, vereinfachende Voraussetzung zu Grunde gelegt, dass die n Eigenwerte der zu untersuchenden, n-reihigen Matrix sämtlich voneinander verschieden sind. Es muss nun noch geprüft werden, ob und mit welchen Aenderungen oder Einschränkungen die einzelnen Berechnungsverfahren auch dann benutzt werden können, wenn zwei oder mehr Eigenwerte der Matrix einander gleich sind, wenn also die Säkulargleichung Doppel- oder Mehrfachwurzeln besitzt.

A. Beschränkte Genauigkeit bei der Berechnung mehrfacher Eigenwerte:

Die in den Abschnitten I und II beschriebenen Verfahren werden in ihrer Verwendbarkeit durch das etwaige Vorhandensein mehrfacher Eigenwerte grundsätzlich nicht beeinflusst, denn es handelt sich bei diesen Verfahren lediglich um das Ausmultiplizieren der Säkulardeterminante, d.h. die Ueberführung aus der Determinantenform (2) in die Polynomform (3) nach einem festliegenden, elementaren Rechnungsgang, ohne dass dabei irgendwelche Nebenbedingungen zu berücksichtigen sind.

Auch für die Verwendung des in Abschnitt III,1 beschriebenen Verfahrens bestehen keine grundsätzlichen Einschränkungen, auch wenn die zu untersuchende Matrix mehrfache Eigenwerte besitzt. Die n Koeffizienten k_i der Säkulargleichung (3) sind durch n, oder, wenn k_1 und k_2 im voraus bekannt sind, durch n-2 Wertepaare α_i , $D(\alpha_i)$ eindeutig bestimmt und können nach einem stets anwendbaren, von den Zahlenwerten unabhängigen Rechnungsgang berechnet werden.

Gewisse rechnerische Schwierigkeiten können sich auch bei der Anwendung dieser elementaren Verfahren ergeben, wenn mehrfache Eigenwerte oder auch mehrere nur wenig voneinander verschiedene Eigenwerte genau ermittelt werden sollen, und zwar aus folgendem Grund. Ist z.B. λ_i ein zweifacher Eigenwert, also eine Doppelwurzel der Gleichung $D(\lambda) = 0$, so besitzt die Parabel $y = D(\lambda)$ an dieser Stelle keinen Schnittpunkt, sondern nur einen Berührungspunkt mit der Abszissenachse. Schon die geringste Ungenauigkeit beim Ausmultiplizieren der Säkulardeterminante bewirkt aber, dass die errechnete Parabel an der betreffenden Stelle die Abszissenachse entweder zweimal schneidet oder sie überhaupt nicht erreicht. Im ersten Fall würde man statt der Doppelwurzel zwei voneinander verschiedene Wurzeln, im zweiten Fall zwei konjugiert komplexe Wurzeln erhalten.

Beispiel: Gegeben die Matrix $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 37,3 & 16,2 & 8,4 \\ 16,2 & 19,6 & 5,0 \\ 8,4 & 5,0 & 12,6 \end{pmatrix}$

Durch Ausmultiplizieren der Säkulardeterminante erhält man

$$D(\lambda) = |\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E}| = -(\lambda^3 - 69,5\lambda^2 - 1090,02\lambda - 4950,188) = 0$$

und hieraus die drei Eigenwerte

$$\lambda_1 = 49,4995 \qquad \lambda_2 = 10,0176 \qquad \lambda_3 = 9,9829$$

Infolge geringfügiger Ungenauigkeit beim Ausmultiplizieren möge sich statt obiger Gleichung beispielsweise die Gleichung

$$\lambda^3 - 69,5\,\lambda^2 + 1090,1\,\lambda - 4949,8 = 0$$

ergeben. Obwohl die Koeffizienten dieser Gleichung kaum(weniger als 0,01%) von den obigen genauen Werten abweichen, ist der Einfluss auf die hieraus errechneten Eigenwerte verhältnismässig gross. Statt der obigen Werte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ erhält man

$$\lambda_1' = 49,4967 \quad , \quad \lambda_2' = 10,1761 \quad , \quad \lambda_3' = 9,8272 \; .$$

Die beiden nahe benachbarten Werte λ_2 und λ_3 ändern sich also gegenüber den obigen Werten um etwa 1,6%.

Das Beispiel zeigt, dass besonders für die genaue Berechnung des Unterschiedes zwischen zwei wenig voneinander verschiedenen Eigenwerten das Ausmultiplizieren der Säkulardeterminante u.U. mit einer sehr grossen Genauigkeit und unter Berücksichtigung einer hohen Dezimalstellenzahl vorgenommen werden muss.

Diese Schwierigkeit bei der Berechnung mehrfacher oder wenig voneinander verschiedener Eigenwerte gilt nicht nur für die elementaren Verfahren nach Abschnitt I bis III, sondern mehr oder weniger auch für alle anderen Verfahren, da ja Ungenauigkeiten, besonders infolge Vernachlässigung letzter Dezimalstellen, bei jedem Rechnungsgang vorkommen können und meistens unvermeidlich sind.

B. Die Eigenlösungen einer Matrix mit mehrfachen Eigenwerten.

Ausser den gezeigten rechnerischen Schwierigkeiten, die sich u.U. bei der Berechnung mehrfacher Eigenwerte ergeben, bestehen gewisse grundsätzliche Einschränkungen in der Verwendbarkeit derjenigen Verfahren, bei denen die Eigenlösungen zur Bestimmung der Eigenwerte benutzt werden; und zwar deswegen, weil bei einer n-reihigen Matrix mit mehrfachen Eigenwerten die Anzahl der voneinander unabhängigen Eigenlösungen $\mathfrak{x}_i$, die mit dem entsprechenden Eigenwert λ_i die Bedingung $(\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{E})\,\mathfrak{x}_i = 0$ erfüllen, u.U. kleiner als n ist, so dass im Gegensatz zu Matrizen mit n voneinander verschiedenen Eigenwerten die Zerlegung eines beliebigen Vektors $\mathfrak{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$

in n Eigenlösungen nicht immer möglich ist. Auf solchen Zerlegungen beruht aber ein grosser Teil der in den Abschnitten IV...VIII beschriebenen Verfahren.

Es muss daher noch untersucht werden, wie weit diese Verfahren auch für Matrizen mit mehrfachen Eigenwerten verwendbar sind.

1. Zerlegung einer Matrix mit mehrfachen Eigenwerten in Teilmatrizen.

a. Ableitung der Einheits-Teilmatrizen.

Die n-reihige Matrix $\mathfrak{A}$ möge m voneinander verschiedene Eigenwerte besitzen, und zwar sei $\lambda_{(i)}$ $(i=1,2,\ldots,m)$ eine $p_{(i)}$-fache Wurzel ($p_{(i)} \geq 1$) der Säkulargleichung $|\mathfrak{A}-\lambda\mathfrak{E}| = 0$. Da die Säkulargleichung insgesamt n Wurzeln besitzt, folgt

$$\sum p_{(i)} = n \qquad (118)$$

(Die eingeklammerten Indizes dienen zur Kennzeichnung der m voneinander verschiedenen Eigenwerte).

Aehnlich wie es bereits früher für Matrizen mit nur einfachen Eigenwerten gezeigt wurde, können auch Matrizen mit mehrfachen Eigenwerten in bestimmte, den einzelnen Eigenwerten $\lambda_{(i)}$ zugeordnete Teilmatrizen zerlegt werden.

Nach der Hamilton-Cayley-schen Gleichung (S. 54) ist

$$\prod_{i=1,2,\ldots m}(\mathfrak{A}-\lambda_{(i)}\mathfrak{E})^{p_{(i)}} = (\mathfrak{A}-\lambda_{(1)}\mathfrak{E})^{p_{(1)}}\cdot(\mathfrak{A}-\lambda_{(2)}\mathfrak{E})^{p_{(2)}}\cdot\ldots\cdot(\mathfrak{A}-\lambda_{(m)}\mathfrak{E})^{p_{(m)}} = 0 \qquad (38')$$

wobei die Reihenfolge der Faktoren +) beliebig vertauscht werden kann.

$\lambda_{(\kappa)}$ sei einer der m verschiedenen Eigenwerte $\lambda_{(i)}$. Die Matrix

$$\mathfrak{Z}_{(\kappa)} = \frac{\prod_{i\neq\kappa}(\mathfrak{A}-\lambda_{(i)}\mathfrak{E})^{p_{(i)}}}{\prod_{i\neq\kappa}(\lambda_{(\kappa)}-\lambda_{(i)})^{p_{(i)}}}\ , \qquad (119)$$

(worin die Produkte in Zähler und Nenner über i=1,2,...,m ausser i=k zu bilden sind und demgemäss der Nenner eine von Null verschiedene Zahl ist) erfüllt nach Gleichung (38') die Bedingung

$$(\mathfrak{A}-\lambda_{(\kappa)}\mathfrak{E})^{p_{(\kappa)}}\cdot\mathfrak{Z}_{(\kappa)} = 0. \qquad (120)$$

Bildet man weiter die Matrix

$$\mathfrak{Z}_{(\kappa)}-\mathfrak{E} = \frac{\prod_{i\neq\kappa}(\mathfrak{A}-\lambda_{(i)}\mathfrak{E})^{p_{(i)}} - \prod_{i\neq\kappa}(\lambda_{(\kappa)}\mathfrak{E}-\lambda_{(i)}\mathfrak{E})^{p_{(i)}}}{\prod_{i\neq\kappa}(\lambda_{(\kappa)}-\lambda_{(i)})^{p_{(i)}}}\ , \qquad (121)$$

so steht im Zähler dieses Ausdruckes die Differenz zweier gleichlautender Polynome von $\mathfrak{A}$ und $\lambda_{(\kappa)}\mathfrak{E}$. Da nun jeder Ausdruck

+) Allen hier und im folgenden betrachteten Matrizen handelt es sich ausschliesslich um Polynome der zu untersuchenden Matrix $\mathfrak{A}$; für die Multiplikation dieser Matrizen gilt daher das kommutative Gesetz (S. 51)

$\alpha^\nu - (\lambda_{(\kappa)}\mathfrak{E})^\nu$ durch $(\alpha - \lambda_{(\kappa)}\mathfrak{E})$ teilbar ist

$$\alpha^\nu - (\lambda_{(\kappa)}\mathfrak{E})^\nu = \alpha^\nu - \lambda_{(\kappa)}^\nu \mathfrak{E} = (\alpha - \lambda_{(\kappa)}\mathfrak{E})\cdot(\alpha^{\nu-1} + \lambda_{(\kappa)}\alpha^{\nu-2} + \ldots + \lambda_{(\kappa)}^{\nu-1}\mathfrak{E}),$$

enthält auch die Differenz der beiden Polynome in (121) und folglich auch die Matrix $(\mathfrak{Z}_{(\kappa)} - \mathfrak{E})$ den Faktor $(\alpha - \lambda_{(\kappa)}\mathfrak{E})$. Entsprechend enthält die Matrix $(\mathfrak{Z}_{(\kappa)} - \mathfrak{E})^{p(\kappa)}$ den Faktor $(\alpha - \lambda_{(\kappa)}\mathfrak{E})^{p(\kappa)}$
Aus Gleichung (120) folgt daher

$$(\mathfrak{E} - \mathfrak{Z}_{(\kappa)})^{p(\kappa)} \cdot \mathfrak{Z}_{(\kappa)} = 0. \qquad (122)$$

Die Matrix

$$\mathfrak{E}_{(\kappa)} = \mathfrak{E} - (\mathfrak{E} - \mathfrak{Z}_{(\kappa)})^{p(\kappa)} \qquad (123)$$

enthält als Faktor die Matrix $\mathfrak{Z}_{(\kappa)}$:

$$\mathfrak{E}_{(\kappa)} = \mathfrak{E} - \left(\mathfrak{E} - \binom{p(\kappa)}{1}\mathfrak{Z}_{(\kappa)} + \binom{p(\kappa)}{2}\mathfrak{Z}_{(\kappa)}^2 - \ldots\right) = \mathfrak{Z}_{(\kappa)}\cdot\left(\binom{p\kappa}{1}\mathfrak{E} + \binom{p_\kappa}{2}\mathfrak{Z}_{(\kappa)} + \ldots\right) \qquad (124)$$

Aus (122) und (123) folgt

$$(\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_{(\kappa)})\cdot \mathfrak{Z}_{(\kappa)} = 0, \qquad (125)$$

also

$$\mathfrak{Z}_{(\kappa)} \cdot \mathfrak{E}_{(\kappa)} = \mathfrak{Z}_{(\kappa)}, \qquad (125')$$

und aus (125) und (124)

$$(\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_{(\kappa)}) \cdot \mathfrak{E}_{(\kappa)} = 0,$$

$$\mathfrak{E}_{(\kappa)}^2 = \mathfrak{E}_{(\kappa)} \qquad (126)$$

Ferner folgt aus (120) und (124)

$$(\alpha - \lambda_{(\kappa)}\mathfrak{E})^{p(\kappa)} \cdot \mathfrak{E}_{(\kappa)} = 0. \qquad (127)$$

Zwischen zwei verschiedenen Eigenwerten $\lambda_{(i)}$, $\lambda_{(\kappa)}$ entsprechenden Matrizen $\mathfrak{Z}_{(i)}$, $\mathfrak{Z}_{(\kappa)}$ gemäss Gleichung (119) besteht, da $\mathfrak{Z}_{(\kappa)}$ definitionsgemäss den Faktor $(\alpha - \lambda_{(i)})^{p(i)}$ enthält, nach Gleichung (120) die Beziehung

$$\mathfrak{Z}_{(i)} \cdot \mathfrak{Z}_{(\kappa)} = 0$$

und folglich nach Gleichung (124)

$$\mathfrak{E}_{(i)} \cdot \mathfrak{E}_{(\kappa)} = 0. \qquad (128)$$

Die Matrizen $\mathfrak{E}_{(i)}$ sollen als „Einheits-Teilmatrizen" bezeichnet werden. Sind sämtliche Eigenwerte der Matrix α voneinander verschieden, so sind die Einheits-Teilmatrizen mit den früher erörterten „Elementarmatrizen" identisch. Sie haben dann sämtlich den Rang 1 und ihre Summe ist gleich der Einheitsmatrix (vgl. Gleichung (127))

Es soll noch gezeigt werden, dass bei Matrizen mit mehrfachen Eigenwerten jedem $p(\omega)$-fachen Eigenwert eine Einheits-Teilmatrix $\mathfrak{E}^{(\omega)}$ vom Rang $p(\omega)$ entspricht, und dass ferner stets ausser den Gleichungen (126), (127) und (128) auch die Gleichung

$$\Sigma \mathfrak{E}^{(\omega)} = \mathfrak{E}$$

erfüllt ist und mithin eine eindeutige Zerlegung der Matrix $\mathfrak{A}$ in Teilmatrizen, die den m verschiedenen Eigenwerten zugeordnet sind, gemäss

$$\mathfrak{A} = \sum_{i=1,2,\dots,m} \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{E}^{(\omega)}$$

stets möglich ist.

Zum Nachweis hierfür werden zwei bekannte Hilfssätze verwendet, die in folgenden kurz aufgeführt seien.

b. Zwei Hilfssätze.

1. Erhebt man eine Matrix $\mathfrak{A}$ auf ihre ν-te Potenz $\mathfrak{A}^\nu$, so gehen sämtliche Eigenwerte λ_i der Matrix $\mathfrak{A}$ in ihre ν-te Potenzen λ_i^ν über.

Beweis: Die Identität

$$|\mathfrak{A} - \lambda \mathfrak{E}| \equiv (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda)$$

bleibt gültig, wenn man λ durch irgend eine andere Grösse ersetzt, z.B. $\lambda = \varepsilon \cdot z$, worin $\varepsilon = \sqrt[\nu]{1}$ und $z = \sqrt[\nu]{x}$:

$$|\mathfrak{A} - \varepsilon z \mathfrak{E}| = (\lambda_1 - \varepsilon z)(\lambda_2 - \varepsilon z) \dots (\lambda_n - \varepsilon z)$$

Lässt man ε die ν Einheitswurzeln durchlaufen und multipliziert die sich so ergebenden ν Gleichungen, so heben sich in jedem der Produkte

$$(\mathfrak{A} - \varepsilon_1 z \mathfrak{E})(\mathfrak{A} - \varepsilon_2 z \mathfrak{E}) \dots (\mathfrak{A} - \varepsilon_\nu z \mathfrak{E}) = \mathfrak{A}^\nu - z^\nu \mathfrak{E}$$

bezw.

$$(\lambda_i - \varepsilon_1 z)(\lambda_i - \varepsilon_2 z) \dots (\lambda_i - \varepsilon_\nu z) = \lambda_i^\nu - z^\nu$$

die Einheitswurzeln weg und man erhält mit $z^\nu = x$

$$(\mathfrak{A}^\nu - x \cdot \mathfrak{E}) = (\lambda_1^\nu - x)(\lambda_2^\nu - x) \dots (\lambda_n^\nu - x).$$

2. Der Rangabfall (S. 53) des Produktes aus zwei Matrizen ist nicht kleiner als der Rangabfall einer dieser Matrizen und nicht grösser als die Summe der Rangabfälle beider Matrizen.

Beweis: Die Matrix $\mathfrak{A}$ möge den Rangabfall q_1, die Matrix $\mathfrak{Z}$ den Rangabfall q_2, ihr Produkt $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{Z}$ den Rangabfall q_{12} besitzen.

α) Der Rangabfall q_{12} der Matrix $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{Z}$ kann keinesfalls kleiner als der von $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{Z}$ sein. Denn die q_2 (q_1) zwischen den Spalten (Zeilen) der Matrix $\mathfrak{Z}$ (bzw. $\mathfrak{A}$) bestehenden linearen Beziehungen gelten unverändert auch für die entsprechenden Spalten (Zeilen) der Matrix $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{Z}$.

β) Hat die Matrix $\mathfrak{A}$ den Rang n (also den Rangabfall $q_1 = 0$) so folgt aus α): $q_{12} \geqq q_2$; und da in diesem Fall die Matrix $\mathfrak{A}^{-1}$ ebenfalls den Rang n hat und $\mathfrak{A}^{-1}(\mathfrak{A}\mathfrak{Z}) = \mathfrak{Z}$ ist, ist auch $q_2 \geqq q_{12}$, d.h. der Rang einer beliebigen Matrix bleibt bei Multiplikation mit einer Matrix vom Rang n unverändert.

γ) Die Matrix $\mathfrak{Z}$ mit dem Rangabfall q_2 enthält $n - q_2$ voneinander linear unabhängige Spalten. Die übrigen q_2 Spalten können durch solche Vektoren ersetzt werden, dass die sich hierdurch ergebende Matrix $\mathfrak{Z}'$ den Rang n besitzt. Die Matrix $\mathfrak{A}\mathfrak{Z}'$ hat dann den Rang $n - q_1$. Nach Wegnehmen der hinzugefügten Spalten bleiben mindestens $n-(q_1 + q_2)$ voneinander unabhängige Spalten übrig.

c. Nachweis der eindeutigen und vollständigen Zerlegung.

$\lambda_{(i)}$ sei ein $p_{(i)}$ -facher Eigenwert der Matrix $\mathfrak{A}$. Die Matrix $(\mathfrak{A} - \lambda_{(i)}\mathfrak{E})$ besitzt also den $p_{(i)}$ -fachen Eigenwert O ; ebenso hat nach dem obigen Hilfssatz 1 die Matrix $(\mathfrak{A} - \lambda_{(i)}\mathfrak{E})^{p_{(i)}}$ genau den $p_{(i)}$ -fachen Eigenwert O.

Hieraus folgt aber, dass der Rangabfall der Matrix $(\mathfrak{A} - \lambda_{(i)}\mathfrak{E})^{p_{(i)}}$ höchstens $p_{(i)}$ beträgt, denn bei einem Rangabfall grösser als $p_{(i)}$ wären in dieser Matrix sämtliche Unterdeterminanten $(n - p_{(i)})$-ter und höherer Ordnung = O, insbesondere also auch die Hauptunterdeterminanten, aus denen sich die ersten $(p_{(i)} + 1)$ Koeffizienten $s_n, s_{n-1}, \ldots, s_{n-p_{(i)}}$ der Säkulargleichung

$$\left|(\mathfrak{A} - \lambda_{(i)}\mathfrak{E})^{p_{(i)}} - x\mathfrak{E}\right| = s_n - s_{n-1}x + s_{n-2}x^2 - \ldots + (-x)^n$$

zusammensetzen (vgl. S. 15). Der Wert x = O wäre also ein mindestens $(p_{(i)} + 1)$-facher Eigenwert der Matrix $(\mathfrak{A} - \lambda_{(i)}^{p_{(i)}}\mathfrak{E})$. Da x=O nur ein $p_{(i)}$ -facher Eigenwert ist, kann also der Rangabfall dieser Matrix nicht grösser sein als $p_{(i)}$.

Die Matrix $\mathfrak{Z}_{(k)}$ nach Gleichung (119) ist, abgesehen von dem endlichen skalaren Faktor im Nenner, das Produkt aus (m-1) Matrizen $(\mathfrak{A} - \lambda_{(i)}\mathfrak{E})^{p_{(i)}}$ (i=1,...,k-1, k+1,...m) , von denen jede, wie gezeigt, höchstens den Rangabfall $p_{(i)}$ besitzt. Nach obigem Hilfssatz 2 beträgt also der Rangabfall des Produktes aus diesen (m-1) Matrizen höchstens $\sum_{i \neq k} p_{(i)}$. Der Rang der Matrix $\mathfrak{Z}_{(k)}$ beträgt also unter Berücksichtigung der Gleichung (118) mindestens

$$n - \sum_{i \neq k} p_{(i)} = p_{(k)}$$

d.h. die Matrix $\mathfrak{Z}_{(k)}$ enthält unter ihren Spalten mindestens $p_{(k)}$ voneinander linear unabhängige Vektoren. Das gleiche gilt nach

Gleichung (125') und Hilfssatz 2 α auch für die Einheits-Teilmatrix $\mathfrak{E}^{(\kappa)}$.

Die Gesamtzahl der in den m Matrizen $\mathfrak{E}^{(i)}$ enthaltenen, voneinander linear unabhängigen Spalten beträgt also mindestens $\sum p_{(i)} = n$. Dabei kann eine lineare Abhängigkeit zwischen den Spalten verschiedener Einheits-Teilmatrizen nicht bestehen. Bestünde eine solche, so könnte das in folgender Form geschrieben werden

$$\mathfrak{z}^{(1)} + \mathfrak{z}^{(2)} + \ldots + \mathfrak{z}^{(m)} = 0 \quad , \qquad (129)$$

worin jeder der Vektoren $\mathfrak{z}^{(i)}$ in irgendeiner Weise linear aus den Spalten der Matrix $\mathfrak{E}^{(i)}$ zusammengesetzt ist. Multipliziert man die Gleichung (129) mit einer der m Matrizen $\mathfrak{E}^{(\kappa)}$, so ergibt sich

$$\mathfrak{E}^{(\kappa)} \cdot \mathfrak{z}^{(\kappa)} + \mathfrak{E}^{(\kappa)} \cdot \sum_{i \neq \kappa} \mathfrak{z}^{(i)} = 0 \quad ,$$

und da sich jeder der Vektoren $\mathfrak{z}^{(i)}$ aus den Spalten der Matrix $\mathfrak{E}^{(i)}$ zusammensetzt, folgt aus den Gleichungen (126) und (128)

$$\mathfrak{E}^{(\kappa)} \cdot \mathfrak{z}^{(\kappa)} = \mathfrak{z}^{(\kappa)} \quad , \quad \mathfrak{E}^{(\kappa)} \cdot \mathfrak{z}^{(i)} = 0 \quad \text{für} \quad i \neq \kappa \quad , \qquad (130)$$

also $\mathfrak{z}^{(\kappa)} = 0$, d.h. in Gleichung (129) verschwinden sämtliche Vektoren $\mathfrak{z}^{(i)}$.

Hieraus folgt aber auch, dass der Rang der Einheits-Teilmatrizen $\mathfrak{E}^{(i)}$ nicht grösser sein kann als $p_{(i)}$. Hätte auch nur eine der Matrizen $\mathfrak{E}^{(i)}$ einen Rang grösser als $p_{(i)}$, so müsste es unter den Spalten der m Einheits-Teilmatrizen mehr als $\sum p_{(i)} = n$ voneinander unabhängige Vektoren geben, was bei Vektoren n-ter Ordnung nicht möglich ist.

Man kann demnach aus den Spalten der Einheits-Teilmatrizen n voneinander linear unabhängige Vektoren $\mathfrak{E}^{i}$ $(i=1,2,\ldots,n)$ zusammenstellen. Jeder beliebige Vektor $\mathfrak{z}$ kann dann als lineare Zusammensetzung aus diesen n Vektoren dargestellt werden

$$\mathfrak{z} = \sum_{i=1,\ldots,n} \alpha_i \cdot \mathfrak{E}^{i} \quad . \qquad (131)$$

Für jeden der Vektoren $\mathfrak{E}^{i}$ gelten die Gleichungen (130) und folglich

$$\left(\sum_{\kappa=1,\ldots,m} \mathfrak{E}^{(\kappa)} \right) \cdot \mathfrak{E}^{i} = \mathfrak{E}^{i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Nach (131) gilt daher auch für jeden Vektor $\mathfrak{z}$, und insbesondere auch für die Spalten der Einheitsmatrix

$$\sum \mathfrak{E}^{(i)} \cdot \mathfrak{z} = \mathfrak{z} \quad ,$$

und folglich auch für die Einheitsmatrix selbst

$$\sum \mathfrak{E}^{(i)} \cdot \mathfrak{E} = \mathfrak{E} \quad .$$

Damit ist gezeigt, dass die Summe der Einheits-Teilmatrizen mit der Einheitsmatrix selbst identisch ist:

$$\sum \mathfrak{E}^{(i)} = \mathfrak{E} \qquad (132)$$

Hieraus folgt weiter, dass auch die Matrix $\mathfrak{A}$ vollständig und eindeutig in m , den verschiedenen Eigenwerten $\lambda_{(i)}$ (i=1,2,...,m) zugeordnete Teilmatrizen

$$\mathfrak{A}_{(i)} = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{E}_{(i)} \qquad (133)$$

zerlegt werden kann, wobei auch zwischen den Teilmatrizen $\mathfrak{A}_{(i)}$ die Beziehung besteht

$$\mathfrak{A}_{(i)} \cdot \mathfrak{A}_{(k)} = \mathfrak{A}_{(k)} \cdot \mathfrak{A}_{(i)} = 0 \qquad (i \neq k)$$

Aus (128) folgt weiter, dass in jeder Potenz und allgemein in jedem Polynom $\varphi(\mathfrak{A})$ der Matrix $\mathfrak{A} = \sum \mathfrak{A}_{(i)}$ sämtliche Glieder $\mathfrak{A}_{(i)} \cdot \mathfrak{A}_{(k)}$ verschwinden, dass also nur die Potenzen bzw. Polynome der einzelnen Teilmatrizen übrigbleiben:

$$\varphi(\mathfrak{A}) = \varphi(\Sigma \mathfrak{A}_{(i)}) = \varphi(\mathfrak{A}_{(1)}) + \varphi(\mathfrak{A}_{(2)}) + \ldots + \varphi(\mathfrak{A}_{(m)}) . \qquad (134)$$

2. Eigenlösungen ersten und höheren Grades.

a. Erweiterter Begriff der Eigenlösung.

Als Eigenlösung der Matrix $\mathfrak{A}$ soll im erweiterten Sinn jeder Vektor $\mathfrak{x}_i$ bezeichnet werden, der die Gleichung

$$(\mathfrak{A} - \lambda_i \mathfrak{E})^t \cdot \mathfrak{x}_i = 0$$

erfüllt, worin t irgendeine positive ganze Zahl ist.
Ein Vektor $\mathfrak{x}_i$, der die Bedingungen

$$(\mathfrak{A} - \lambda_i \mathfrak{E})^{t-1} \cdot \mathfrak{x}_i \neq 0 \quad , \qquad (135)$$

$$(\mathfrak{A} - \lambda_i \mathfrak{E})^t \cdot \mathfrak{x}_i = 0 \qquad (136)$$

erfüllt, soll eine "Eigenlösung t-ten Grades" heissen. Zur Kennzeichnung des Grades einer Eigenlösung dienen hochgestellte, in eckige Klammern gesetzte Zahlen bzw. Buchstaben:

$\mathfrak{x}_i^{[3]}$ = Eigenlösung dritten Grades,
$\mathfrak{x}_i^{[t]}$ = Eigenlösung t-ten Grades.

Bisher wurden nur Eigenlösungen ersten Grades betrachtet, die gemäss Gleichung (135) und (136) mit t=1 die Bedingung erfüllen

$$\mathfrak{x}_i \neq 0 \quad , \quad (\mathfrak{A} - \lambda_i \mathfrak{E}) \cdot \mathfrak{x}_i = 0 \quad .$$

Eine n-reihige Matrix mit n voneinander verschiedenen Eigenwerten besitzt nur Eigenlösungen ersten Grades. Eine Matrix mit mehrfachen Eigenwerten kann entweder ebenfalls nur Eigenlösungen ersten Grades oder auch solche höheren Grades besitzen.

Beispiel: (vgl. auch Seite 145)

Die Matrix $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \\ 11 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 14$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Dem doppelten Eigenwert $\lambda = 2$ entspricht nur eine Eigenlösung ersten Grades, also nur eine Lösung der Gleichung $(\mathfrak{A} - 2\cdot\mathfrak{E})\cdot\mathfrak{x} = 0$; es ist

$$\mathfrak{x}_2^{[1]} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad (\mathfrak{A}-2\mathfrak{E})\cdot\mathfrak{x}_2^{[1]} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 4 \\ 11 & 3 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 .$$

Ausserdem gibt es aber noch eine Eigenlösung zweiten Grades $\mathfrak{x}_2^{[2]}$ die zwar nicht die Gleichung $(\mathfrak{A}-2\mathfrak{E})\cdot\mathfrak{x} = 0$, wohl aber die Gleichung $(\mathfrak{A}-2\mathfrak{E})^2\cdot\mathfrak{x} = 0$ erfüllt:

$$\mathfrak{x}_2^{[2]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} ; \quad (\mathfrak{A}-2\mathfrak{E})\cdot\mathfrak{x}_2^{[2]} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 4 \\ 11 & 3 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} ; \quad (\mathfrak{A}-2\mathfrak{E})^2\,\mathfrak{x}_2^{[2]} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 4 \\ 11 & 3 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

b) Die Eigenlösungen zu einem $p_{(i)}$ -fachen Eigenwert.

Nach Gleichung (127) sind sämtliche Spalten der Einheits-Teilmatrizen $\mathfrak{E}_{(i)}$ und ebenso alle aus den Spalten einer solchen Matrix zusammengesetzten Vektoren Eigenlösungen ersten oder höheren Grades der Matrix $\mathfrak{A}$, denn jeder dieser Vektoren $\mathfrak{x}_{(i)}$ erfüllt mit dem entsprechenden, $p_{(i)}$ -fachen Eigenwert $\lambda_{(i)}$ die Gleichung $(\mathfrak{A}-\lambda_{(i)}\mathfrak{E})^{p_{(i)}}\cdot\mathfrak{x}_{(i)} = 0$.

Wie oben gezeigt, besitzt jede der Matrizen $\mathfrak{E}_{(i)}$ genau den Rang $p_{(i)}$, enthält also unter ihren Spalten $p_{(i)}$ voneinander linear unabhängige Eigenlösungen $\mathfrak{x}_{(i)\nu}$ ($\nu = 1, 2, \ldots, p_{(i)}$). Jeder beliebige Vektor kann gemäss (131) als lineare Zusammensetzung aus diesen insgesamt n voneinander unabhängigen Vektoren dargestellt werden.

Ausser den $p_{(i)}$ Eigenlösungen $\mathfrak{x}_{(i)\nu}$ und den aus diesen linear zusammengesetzten Vektoren gibt es keine Eigenlösungen ersten oder höheren Grades, die dem Eigenwert $\lambda_{(i)}$ entsprechen, also die Gleichung

$$(\mathfrak{A}-\lambda_{(i)}\mathfrak{E})^t\cdot\mathfrak{x}_{(i)} = 0 \qquad (137)$$

erfüllen. Denn auch jede Eigenlösung $\mathfrak{x}_{(i)}$ liesse sich gemäss (131) in die n Eigenlösungen $\mathfrak{x}_{(\kappa)\nu}$ zerlegen.

$$\mathfrak{x}_{(i)} = \sum_{\substack{\nu=1,\ldots,p_{(\kappa)} \\ \kappa=1,\ldots,m}}\sum a_{(\kappa)\nu}\cdot\mathfrak{x}_{(\kappa)\nu} . \qquad (138)$$

Da nun jede Einheits-Teilmatrix $\mathfrak{E}_{(\kappa)}$ nach Gleichung (119) und (124) für $\kappa \neq i$ den Faktor $(\mathfrak{A}-\lambda_{(i)}\mathfrak{E})$ und wegen $\mathfrak{E}_{(\kappa)}^t = \mathfrak{E}_{(\kappa)}$ (Gleichung 126) auch den Faktor $(\mathfrak{A}-\lambda_{(i)}\mathfrak{E})^t$ enthält, gilt für jede dem Eigenwert $\lambda_{(i)}$ entsprechende Eigenlösung t-ten Grades nach Gleichung (137) für $\kappa \neq i$:

$$\mathfrak{E}_{(\kappa)}\cdot\mathfrak{x}_{(i)} = 0 \quad , \quad \mathfrak{E}_{(i)}\cdot\mathfrak{x}_{(i)} = \Big(\mathfrak{E}-\sum_{\kappa\neq i}\mathfrak{E}_{(\kappa)}\Big)\mathfrak{x}_{(i)} = \mathfrak{x}_{(i)} \qquad (139)$$

In Gleichung (138) verschwinden also bei Multiplikation mit $\mathfrak{k}_{(i)}$ alle Eigenlösungen $\mathfrak{k}_{(\kappa)}$ für $\kappa \neq i$, und $\mathfrak{k}_{(i)}$ ergibt sich als lineare Zusammensetzung der dem Wert $\lambda_{(i)}$ entsprechenden Vektoren $\mathfrak{k}_{(i)\nu}$ $(\nu = 1,2,\ldots,p_{(i)})$.

3. Matrizen, die nur Eigenlösungen ersten Grades besitzen.

Eine Matrix mit mehrfachen Eigenwerten, die nur Eigenlösungen ersten Grades besitzt, kann in gleicher Weise, wie es früher (Seite 93) für Matrizen mit nur einfachen Eigenwerten gezeigt wurde, in Teilmatrizen vom Range 1 zerlegt werden. Bildet man aus den n voneinander linear unabhängigen Eigenlösungsvektoren $\mathfrak{k}_i$ (i=1,2,...,n) und den entsprechenden Zeilen $\mathfrak{y}_i$ der zu $\mathfrak{K} = (\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \cdots \mathfrak{k}_n)$ reziproken Matrix $\mathfrak{Y} = \mathfrak{K}^{-1}$ die Matrizen

$$\mathfrak{k}_{oi} = \mathfrak{k}_i | \cdot \overline{\mathfrak{y}_i} \ ,$$

so besitzen diese Matrizen die gleichen Eigenschaften wie die früher behandelten Elementarmatrizen

$$\mathfrak{k}_{oi}^{\,2} = \mathfrak{k}_{oi} \ ; \quad \mathfrak{k}_{oi} \cdot \mathfrak{k}_{o\kappa} = 0 \ \text{für} \ i \neq \kappa \ ; \quad \Sigma \mathfrak{k}_{oi} = \mathfrak{E} \ ; \tag{140}$$

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{k}_{oi} = \lambda_i \cdot \mathfrak{k}_{oi} \ ; \quad \mathfrak{A} = \Sigma \lambda_i \cdot \mathfrak{k}_{oi} \ . \tag{141}$$

Die Matrizen $\mathfrak{k}_{oi}$ sollen daher ebenfalls als Elementarmatrizen bezeichnet werden. Der einzige Unterschied gegenüber einer Matrix mit nur einfachen Eigenwerten besteht darin, dass die einem $p_{(i)}$-fachen Eigenwert entsprechenden $p_{(i)}$ Elementarmatrizen nicht eindeutig festliegen, sondern erst durch die willkürliche Wahl der Vektoren $\mathfrak{k}_{(i)\nu}$ ($\nu = 1, \ldots, p_{(i)}$) bestimmt sind.

Die Summe der einem bestimmten $p_{(i)}$ -fachen Eigenwert entsprechenden Elementarmatrizen

$$\mathfrak{k}_{o(i)\nu} = \mathfrak{k}_{(i)\nu} | \cdot \overline{\mathfrak{y}_{(i)\nu}} \qquad (\nu = 1,2,\ldots, p_{(i)})$$

ist von der Wahl der Vektoren $\mathfrak{k}_{(i)\nu}$ unabhängig und ist gleich der entsprechenden Einheits-Teilmatrix $\mathfrak{k}_{(i)}$. Denn aus (130) folgt

$$\mathfrak{k}_{(i)} \cdot \mathfrak{k}_{o(\kappa)\nu} = \mathfrak{k}_{(i)} \cdot \mathfrak{k}_{(\kappa)\nu} | \cdot \overline{\mathfrak{y}_{(\kappa)\nu}} = 0 \qquad \text{für} \ \kappa \neq i$$

Daher ist mit (140) und (132)

$$\mathfrak{k}_{(i)} = \mathfrak{k}_{(i)} \cdot \sum_{\kappa=1,\ldots,m} \mathfrak{k}_{o\kappa} = \mathfrak{k}_{(i)} \cdot \sum_{\nu=1,\ldots,p_{(i)}} \mathfrak{k}_{o(i)\nu} \ ; \quad \sum_{\nu=1,\ldots,p_{(i)}} \mathfrak{k}_{o(i)\nu} = \sum_{\kappa=1,\ldots,m} \mathfrak{k}_{(\kappa)} \cdot \sum_{\nu=1,\ldots,p_{(i)}} \mathfrak{k}_{o(i)\nu} = \mathfrak{k}_{(i)} \sum_{\nu=1,\ldots,p_{(i)}} \mathfrak{k}_{o(i)\nu},$$

also

$$\mathfrak{k}_{(i)} = \sum_{\nu=1,\ldots,p_{(i)}} \mathfrak{k}_{o(i)\nu} \ . \tag{142}$$

Ferner gelten, wenn die Matrix $\mathcal{A}$ nur Eigenlösungen ersten Grades besitzt und folglich sämtliche Spalten der Einheits-Teilmatrizen $\mathcal{E}_{(i)}$ Eigenlösungen ersten Grades sind, die Gleichungen

$$\mathcal{A}_{(i)} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{E}_{(i)} = \lambda_{(i)} \mathcal{E}_{(i)} \quad ; \quad \mathcal{A} = \sum_{i=1,\dots,m} \lambda_{(i)} \mathcal{E}_{(i)} \qquad (143)$$

Beispiel:

Die Matrix $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ besitzt die Eigenwerte $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$. Die Zerlegung in Einheits-Teilmatrizen nach Gleichung (119) und (123) ergibt

$$\mathcal{A} = \lambda_{(1)} \mathcal{E}_{(1)} + \lambda_{(2)} \mathcal{E}_{(2)} = 8 \cdot \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}8 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0{,}6 & -0{,}8 & -0{,}4 \\ -0{,}2 & 0{,}6 & -0{,}2 \\ -0{,}2 & -0{,}4 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

Die beiden Einheits-Teilmatrizen $\mathcal{E}_{(1)}$ und $\mathcal{E}_{(2)}$ erfüllen die Bedingung

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{E}_{(i)} = \mathcal{E}_{(i)} \cdot \mathcal{A} = \lambda_{(i)} \mathcal{E}_{(i)} .$$

Zur weiteren Aufspaltung in Elementarmatrizen vom Range 1 werden aus den Spalten jeder Einheits-Teilmatrix $\mathcal{E}_{(i)}$, die einem $p_{(i)}$-fachen Eigenwert $\lambda_{(i)}$ entspricht, willkürlich $p_{(i)}$ voneinander unabhängige Vektoren gewählt und in einer Matrix $\mathcal{H}$ zusammengestellt, z.B.

$$\mathcal{H} = (\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3) = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 & -0{,}8 \\ 0{,}2 & -0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & -0{,}2 & -0{,}4 \end{pmatrix} , \quad \mathcal{H}^{-1} = \mathcal{Y} = \begin{pmatrix} \overline{\mathfrak{y}_1} \\ \overline{\mathfrak{y}_2} \\ \overline{\mathfrak{y}_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Die Elementarmatrix $\mathcal{E}_{01} = \mathfrak{x}_1 | \cdot \overline{\mathfrak{y}_1}$ ist mit der Einheits-Teilmatrix $\mathcal{E}_{(1)}$ identisch. Die beiden, dem Eigenwert $\lambda_{(2)} = 3$ entsprechenden Elementarmatrizen sind

$$\mathcal{E}_2 = \mathfrak{x}_2 | \cdot \overline{\mathfrak{y}_2} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0 & -1{,}2 \\ -0{,}2 & 0 & 0{,}4 \\ -0{,}2 & 0 & 0{,}4 \end{pmatrix} , \quad \mathcal{E}_3 = \mathfrak{x}_3 | \cdot \overline{\mathfrak{y}_3} = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}8 & 0{,}8 \\ 0 & 0{,}6 & -0{,}6 \\ 0 & -0{,}4 & 0{,}4 \end{pmatrix} ;$$

ihre Summe ist gleich der Einheits-Teilmatrix $\mathcal{E}_{(2)}$.

Anwendbarkeit der einzelnen Verfahren.

Besitzt die zu untersuchende Matrix $\mathcal{A}$ nur Eigenlösungen ersten Grades, so besteht keine grundsätzliche Einschränkung für die Verwendbarkeit der in den Abschnitten IV .... VIII beschriebenen Verfahren.

Aus den Gleichungen ( ), ( ), (134) und (143) folgt, dass man durch Bildung von Potenzen und Polynomen der Matrix $\mathcal{A}$ auf dem in Abschnitt VII beschriebenen Näherungswege die m Einheits-Teilmatrizen $\mathcal{E}_{(i)}$ eindeutig ermitteln kann. Einheits-Teilmatrizen vom Rang $p_{(i)} > 1$ unterscheiden sich von Elementarmatrizen dadurch, dass ihre Spalten einander nicht proportional

sind, und dass ihre Diagonalsumme nicht 1, sondern $p_{(\omega)}$ beträgt. Die Einheits-Teilmatrizen sind jedoch ebenso wie Elementarmatrizen daran kenntlich, dass sie bei Multiplikation mit der Matrix $\mathfrak{A}$ oder auch mit beliebigen Polynomen von $\mathfrak{A}$ sich selbst proportional bleiben:

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{k}_{(\omega)} = \lambda_{(\omega)} \mathfrak{k}_{(\omega)} \quad ; \quad \mathfrak{k}_{(\omega)}^2 = \mathfrak{k}_{(\omega)} .$$

Ebenso lässt sich jeder beliebige Vektor $\mathfrak{z}$ eindeutig in m Eigenlösungen zerlegen, die den m verschiedenen Eigenwerten $\lambda_{(\omega)}$ entsprechen:

$$\mathfrak{z} = \sum_{\omega=1,\dots,m} (\mathfrak{k}_{(\omega)} \mathfrak{z}) = \sum_{\omega=1,\dots,m} \alpha_{(\omega)} \mathfrak{z}_{(\omega)} . \qquad (144)$$

Die in Abschnitt IV beschriebenen Näherungsverfahren sind ohne Einschränkung anwendbar und die in Abschnitt VII (Seite 118 ff) hierfür angegebenen Konvergenzbedingungen gelten unverändert auch für den hier betrachteten Fall. Auch die Anwendbarkeit des Näherungsverfahrens nach Abschnitt VIII wird durch das Zusammenfallen mehrerer Eigenwerte grundsätzlich nicht beeinflusst, wenn sämtliche Eigenlösungen vom ersten Grade sind und n ausreichend genaue und voneinander unabhängige Näherungslösungen bekannt sind.

Das Verfahren V kann ebenfalls ohne weiteres verwendet werden, allerdings mit der Einschränkung, dass, wie auf Seite 64 ff behandelt, nur diejenigen Eigenlösungen erfasst werden, die in dem gewählten Vektor $\mathfrak{z}_1 = \sum \alpha_{(\omega)} \mathfrak{k}_{(\omega)}$ enthalten sind. Falls hierin jedem Eigenwert $\lambda_{(i)}$ $(i=1,\dots,m)$ ein von Null verschiedener Anteil $\alpha_{(\omega)} \mathfrak{k}_{(\omega)}$ entspricht, so sind nach Satz 1 und 2 (Seite 64)[f] die Vektoren $\mathfrak{z}_\nu = \mathfrak{A}^{\nu-1} \cdot \mathfrak{z}_1$ $(\nu = 1, \dots, m)$ voneinander unabhängig, dagegen der Vektor $\mathfrak{z}_{m+1} = \mathfrak{A}^m \cdot \mathfrak{z}_1$ von diesen abhängig. Man kann dann zwar sämtliche m Eigenwerte $\lambda_{(i)}$ und auch die entsprechenden, in $\mathfrak{z}_1$ enthaltenen Eigenlösungsvektoren $\alpha_{(\omega)} \mathfrak{k}_{(\omega)}$ ermitteln. Ob es sich aber bei den errechneten Werten $\lambda_{(i)}$ um ein- oder mehrfache Eigenwerte handelt, kann nur durch eine zusätzliche Rechnung (z.B. durch Wiederholung der Rechnung mit einem anderen Vektor $\mathfrak{z}_1$) festgestellt werden.

Für die Anwendung der Verfahren nach Abschnitt VI und VII ist das Vorhandensein mehrfacher Eigenwerte unwesentlich, falls der zu berechnende Eigenwert ein einfacher ist. Für die Berechnung mehrfacher Eigenwerte ist die Verwendung dieser Verfahren an sich ebenfalls möglich, im allgemeinen jedoch nicht zu empfehlen, weil man einer Matrix nicht von vornherein ansehen kann, ob zwei ihrer Eigenwerte einander gleich oder z.B. wenig voneinander verschieden sind. Gerade für den letzten Fall eignen sich die Verfahren VI und

[f] und Satz 3 (S. 65), der in dem hier betrachteten Fall auch für mehrfache Eigenwerte gültig ist.

VII sehr schlecht. Es empfiehlt sich, diese Verfahren nur dann anzuwenden, wenn man mit einiger Sicherheit erkennt, dass ein Eigenwert alle anderen erheblich überragt, besonders also dann, wenn die Spalten der zu untersuchenden Matrix (oder einer Potenz oder eines Polynomes dieser Matrix) eine angenäherte Proportionalität erkennen lassen.

4. Matrizen mit Eigenlösungen höheren Grades.

a. Ergänzungsmatrizen.

Die Gleichung (143)

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{k}_{(i)} = \lambda_{(i)} \mathfrak{k}_{(i)}$$

gilt nur für solche Einheits-Teilmatrizen der Matrix $\mathfrak{A}$, deren sämtliche Spalten Eigenlösungen ersten Grades (oder auch teilweise = 0) sind. Entspricht dem betreffenden Eigenwert $\lambda_{(i)}$ eine Eigenlösung höheren Grades, so muss eine solche (wie unter 2b, S.143 gezeigt) auch in den Spalten der entsprechenden Einheits-Teilmatrix $\mathfrak{k}_{(i)}$ enthalten sein. In diesem Fall ist also nach Gleichung (135)

$$(\mathfrak{A} - \lambda_{(i)} \mathfrak{E}) \cdot \mathfrak{k}_{(i)} \neq 0 \quad ; \quad \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{k}_{(i)} \neq \lambda_{(i)} \cdot \mathfrak{k}_{(i)} \qquad (145)$$

Die Matrix

$$\mathfrak{k}_{(i)}^{\underline{1}} = (\mathfrak{A} - \lambda_{(i)} \mathfrak{E}) \cdot \mathfrak{k}_{(i)}$$

soll als „erste Ergänzungsmatrix" zu $\mathfrak{k}_{(i)}$ bezeichnet werden. Denn sie ergänzt die Ungleichung (145) zu der Gleichung

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{k}_{(i)} = \lambda_{(i)} \mathfrak{k}_{(i)} + \mathfrak{k}_{(i)}^{\underline{1}}$$

Ebenso möge allgemein

$$\mathfrak{k}_{(i)}^{\underline{s}} = (\mathfrak{A} - \lambda_{(i)} \mathfrak{E})^{s} \cdot \mathfrak{k}_{(i)} \qquad (146)$$

als die s-te Ergänzungsmatrix zu $\mathfrak{k}_{(i)}$ bezeichnet werden.
Entspricht dem Eigenwert $\lambda_{(i)}$ eine Eigenlösung $t_{(i)}$-ten Grades, jedoch keine Eigenlösung höheren als $t_{(i)}$-ten Grades, so ist gemäss Gleichung (135) und (136)

$$\mathfrak{k}_{(i)}^{\underline{t_{(i)}-1}} = (\mathfrak{A} - \lambda_{(i)} \mathfrak{E})^{t_{(i)}-1} \cdot \mathfrak{k}_{(i)} \neq 0 \quad , \quad \mathfrak{k}_{(i)}^{\underline{t_{(i)}}} = (\mathfrak{A} - \lambda_{(i)} \mathfrak{E})^{t_{(i)}} = 0 \, . \qquad (147)$$

Aus Gleichung (146) folgt für das Produkt zweier aus der gleichen Einheits-Teilmatrix $\mathfrak{k}_{(i)}$ abgeleiteten Ergänzungsmatrizen $\mathfrak{k}_{(i)}^{\underline{a}} = (\mathfrak{A} - \lambda_{(i)} \mathfrak{E})^{a} \cdot \mathfrak{k}_{(i)}$ und $\mathfrak{k}_{(i)}^{\underline{b}} = (\mathfrak{A} - \lambda_{(i)} \mathfrak{E})^{b} \cdot \mathfrak{k}_{(i)}$

$$\mathfrak{k}_{(i)}^{\underline{a}} \cdot \mathfrak{k}_{(i)}^{\underline{b}} = (\mathfrak{A} - \lambda_{(i)} \mathfrak{E})^{a+b} \cdot \mathfrak{k}_{(i)} = \mathfrak{k}_{(i)}^{\underline{a+b}} \, . \qquad (148)$$

Jede Potenz und jedes Polynom der Teilmatrix $\mathfrak{A}_{(i)} = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{E}_{(i)}$ lässt sich als Summe von Vielfachen der Einheitsmatrix $\mathfrak{E}_{(i)}$ und ihrer Ergänzungsmatrizen $\mathfrak{E}_{(i)}^{[1]}, \ldots, \mathfrak{E}_{(i)}^{[t_{(i)}-1]}$ darstellen:

$$\mathfrak{A}_{(i)}^2 = \mathfrak{A}^2 \cdot \mathfrak{E}_{(i)} = \left(\lambda_{(i)} \mathfrak{E} + (\mathfrak{A} - \lambda_i \mathfrak{E})\right)^2 \cdot \mathfrak{E}_{(i)} = \lambda_{(i)}^2 \mathfrak{E}_{(i)} + 2\lambda_{(i)} \mathfrak{E}_{(i)}^{[1]} + \mathfrak{E}_{(i)}^{[2]},$$

$$\mathfrak{A}_{(i)}^\nu = \mathfrak{A}^\nu \cdot \mathfrak{E}_{(i)} = \lambda_{(i)}^\nu \cdot \mathfrak{E}_{(i)} + \binom{\nu}{1} \lambda_{(i)}^{\nu-1} \cdot \mathfrak{E}_{(i)}^{[1]} + \binom{\nu}{2} \lambda_{(i)}^{\nu-2} \cdot \mathfrak{E}_{(i)}^{[2]} + \ldots + \binom{\nu}{t_{(i)}-1} \lambda_{(i)}^{\nu-t_{(i)}+1} \cdot \mathfrak{E}_{(i)}^{[t_{(i)}-1]}.$$

Die Matrix $\mathfrak{A}^\nu$ selbst ist gleich der Summe der Teilmatrizen $\mathfrak{A}^\nu \cdot \mathfrak{E}_{(i)}$

$$\mathfrak{A}^\nu = \mathfrak{A}^\nu \cdot \sum \mathfrak{E}_{(i)} = \sum \left(\mathfrak{A}^\nu \cdot \mathfrak{E}_{(i)}\right)$$

$$= \sum_{i=1,\ldots,m} \left(\lambda_{(i)}^\nu \mathfrak{E}_{(i)} + \binom{\nu}{1} \lambda_{(i)}^{\nu-1} \mathfrak{E}_{(i)}^{[1]} + \ldots + \binom{\nu}{t_{(i)}-1} \lambda_{(i)}^{\nu-t_{(i)}+1} \mathfrak{E}_{(i)}^{[t_{(i)}-1]}\right). \qquad (149)$$

Diese Gleichung gilt auch für negative ν, z.B. für $\nu = -1$:

$$\mathfrak{A}^{-1} = \sum_{i=1,\ldots,m} \left(\mathfrak{A}^{-1} \mathfrak{E}_{(i)}\right) = \sum_{i=1,\ldots,m} \left(\lambda_{(i)}^{-1} \mathfrak{E}_{(i)} - \lambda_{(i)}^{-2} \mathfrak{E}_{(i)}^{[1]} + \lambda_{(i)}^{-3} \mathfrak{E}_{(i)}^{[2]} - \ldots - (-\lambda_{(i)})^{-t_{(i)}} \cdot \mathfrak{E}_{(i)}^{[t_{(i)}-1]}\right)$$

und allgemein

$$\mathfrak{A}^{-\nu} = \sum_{i=1,\ldots,m} \left(\lambda_{(i)}^{-\nu} \mathfrak{E}_{(i)} - \binom{\nu}{1} \lambda_{(i)}^{-(\nu+1)} \mathfrak{E}_{(i)}^{[1]} + \binom{\nu+1}{2} \lambda_{(i)}^{-(\nu+2)} \mathfrak{E}_{(i)}^{[2]} - \ldots \pm \binom{\nu+t_{(i)}-2}{t_{(i)}-1} \lambda_{(i)}^{-(\nu+t_{(i)}-1)} \cdot \mathfrak{E}_{(i)}^{[t_{(i)}-1]}\right) \qquad (150)$$

Die Matrix $\mathfrak{A} - \alpha \mathfrak{E}$, worin α eine beliebige Zahl sei, hat die Eigenwerte $\lambda_{(i)} - \alpha$, dagegen sind die Einheitsmatrizen $\mathfrak{E}_{(i)}$ und die Ergänzungsmatrizen

$$\mathfrak{E}_{(i)}^{[s]} = \left((\mathfrak{A} - \alpha \mathfrak{E}) - (\lambda_{(i)} - \alpha)\mathfrak{E}\right)^s \cdot \mathfrak{E}_{(i)} = (\mathfrak{A} - \lambda_{(i)} \mathfrak{E})^s \cdot \mathfrak{E}_{(i)}$$

die gleichen wie die der Matrix $\mathfrak{A}$. Die Gleichungen (146) bis (150) gelten daher auch für die Matrix $(\mathfrak{A} - \alpha \mathfrak{E})$, wenn man die Werte $\lambda_{(i)}$ durch $(\lambda_{(i)} - \alpha)$ ersetzt, z.B.

$$(\mathfrak{A} - \alpha \mathfrak{E})^{-\nu} = \sum_{i=1,\ldots,m} \left((\lambda_{(i)} - \alpha)^{-\nu} \mathfrak{E}_{(i)} - \binom{\nu}{1} (\lambda_{(i)} - \alpha)^{-(\nu+1)} \mathfrak{E}_{(i)}^{[1]} + \ldots \pm \binom{\nu+t_{(i)}-2}{t_{(i)}-1} (\lambda_{(i)} - \alpha)^{-(\nu+t_{(i)}-1)} \cdot \mathfrak{E}_{(i)}^{[t_{(i)}-1]}\right) \qquad (151)$$

b) Konvergenz der Matrix $\mathfrak{A}^\nu$

$\lambda_{(1)}$ sei der dem Betrage nach grösste Eigenwert der Matrix $\mathfrak{A}$

$$|\lambda_{(1)}| > |\lambda_{(i)}| \qquad (i = 2, 3, \ldots, m) \qquad (152)$$

Matrizen, die keinen grössten Eigenwert im Sinne der Ungleichung (152), sondern statt dessen zwei gleich grosse Eigenwerte verschiedenen Vorzeichens (z.B. zwei konjugiert komplexe Werte) besitzen, werden später noch besonders betrachtet.

Dem Eigenwert $\lambda_{(1)}$ mögen Eigenlösungen ersten bis $t_{(1)}$-ten Grades entsprechen; es sei also nach Gleichung (147)

$$(\mathfrak{A} - \lambda_{(1)} \mathfrak{E})^{t_{(1)}-1} \cdot \mathfrak{E}_{(1)} = \mathfrak{E}_{(1)}^{[t_{(1)}-1]} \neq 0, \quad (\mathfrak{A} - \lambda_{(1)} \mathfrak{E})^{t_{(1)}} \cdot \mathfrak{E}_{(1)} = 0$$

Die Matrix $\mathfrak{A}^\nu$ kann durch den Ausdruck (149) als lineare Zusammensetzung aus den m Einheits-Teilmatrizen $\mathfrak{E}_{(i)}$ und deren Ergänzungsmatrizen $\mathfrak{E}_{(i)}^{[s_{(i)}]}$ dargestellt werden. Dividiert man diesen Ausdruck durch den Koeffizienten von $\mathfrak{E}_{(1)}^{[t_{(1)}-1]}$, so erhält man

$$\frac{\mathfrak{A}^{\nu}}{\lambda_{(i)}^{\nu-t_{(i)}+1}\cdot\binom{\nu}{t_{(i)}-1}} = \sum_{\substack{s_{(i)}=0,1,\dots,t_{(i)}-1\\ i=1,2,\dots,m}}\sum \frac{\lambda_{(i)}^{\nu-s_{(i)}}\cdot\binom{\nu}{s_{(i)}}}{\lambda_{(i)}^{\nu-t_{(i)}+1}\cdot\binom{\nu}{t_{(i)}-1}}\cdot \mathfrak{k}_{(i)}^{\overline{s_{(i)}}},$$

worin der einfacheren Darstellung wegen die für die Ergänzungsmatrizen benutzte Bezeichnungsweise $\mathfrak{k}_{(i)}^{\overline{s_{(i)}}} = (\mathfrak{A}-\lambda_{(i)}\mathfrak{k})^{s_{(i)}}\cdot\mathfrak{k}_{(i)}$ auch für $s_{(i)}=0$, also für die Einheits-Teilmatrix selbst angewandt ist: $\mathfrak{k}_{(i)}^{\overline{0}} = \mathfrak{k}_{(i)}$.

Die in diesem Ausdruck vorkommenden Koeffizienten von $\mathfrak{k}_{(i)}^{\overline{s_{(i)}}}$

$$\frac{\lambda_{(i)}^{\nu-s_{(i)}}\cdot\binom{\nu}{s_{(i)}}}{\lambda_{(i)}^{\nu-t_{(i)}+1}\cdot\binom{\nu}{t_{(i)}-1}} = \left(\frac{\nu!}{s_{(i)}!\,(\nu-s_{(i)})!}\cdot\lambda_{(i)}^{\nu-s_{(i)}}\right):\left(\frac{\nu!}{(t_{(i)}-1)!\,(\nu-t_{(i)}+1)!}\cdot\lambda^{\nu-t_{(i)}+1}\right)$$

$$= \frac{(\nu-t_{(i)}+1)!}{(\nu-s_{(i)})!}\cdot\frac{(t_{(i)}-1)!}{s_{(i)}!}\cdot\left(\frac{\lambda_{(i)}}{\lambda_{(i)}}\right)^{\nu}\cdot\frac{\lambda_{(i)}^{t_{(i)}-1}}{\lambda_{(i)}^{s_{(i)}}}$$

konvergieren mit wachsendem ν sämtlich mit Ausnahme des Koeffizienten von $\mathfrak{k}_{(i)}^{\overline{t_{(i)}-1}}$ gegen Null. Für $|\lambda_{(i)}|<|\lambda_{(i)}|$ bewirkt der Faktor $\left(\frac{\lambda_{(i)}}{\lambda_{(i)}}\right)^{\nu}$ bei genügend hohen ν auf jeden Fall eine Konvergenz gegen 0, auch wenn $s_{(i)} > t_{(i)}-1$ ist und daher der Bruch

$$\frac{(\nu-t_{(i)}+1)!}{(\nu-s_{(i)})!} = (\nu-t_{(i)}+1)\cdot(\nu-t_{(i)})\cdot\dots\cdot(\nu-s_{(i)}+1)$$

als ein Polynom $(s_{(i)}-t_{(i)}+1)$-ten Grades im Zähler steht. Für $\lambda_{(i)}=\lambda_{(i)}$, also für die Einheits-Teilmatrix $\mathfrak{k}_{(i)}$ und deren Ergänzungsmatrizen $\mathfrak{k}_{(i)}^{\overline{s_{(i)}}}$ $(s_{(i)} \leqq t_{(i)}-2)$ ist zwar $\left(\frac{\lambda_{(i)}}{\lambda_{(i)}}\right)^{\nu}=1$, dagegen steht im Nenner des Polynom $(t_{(i)}-s_{(i)}-1)$-ten Grades

$$(\nu-s_{(i)})\cdot(\nu-s_{(i)}-1)\cdot\dots\cdot(\nu-t_{(i)}+2),$$

das mit wachsendem ν jede endliche Zahl überschreitet, so dass auch diese Koeffizienten gegen Null konvergieren. Es ist also

$$\lim_{\nu\to\infty}\left(\frac{\mathfrak{A}^{\nu}}{\lambda_{(i)}^{\nu-t_{(i)}+1}\cdot\binom{\nu}{t_{(i)}-1}}\right) = \mathfrak{k}_{(i)}^{\overline{t_{(i)}-1}} = (\mathfrak{A}-\lambda_{(i)}\mathfrak{k})^{t_{(i)}-1}\cdot\mathfrak{k}_{(i)} \quad (153)$$

c. Anwendbarkeit der einzelnen Verfahren.

Wenn die zu untersuchende Matrix $\mathfrak{A}$ Eigenlösungen höheren als ersten Grades besitzt, so sind die in den Abschnitten IV...VIII behandelten Verfahren nur mit gewissen Einschränkungen anwendbar. Das gilt besonders für die in den Abschnitten IV, VI, VII und VIII beschriebenen Näherungsverfahren, die in dem hier betrachteten Fall u.U. entweder überhaupt nicht oder so langsam konvergieren, dass eine praktische Verwendung nicht in Betracht kommt.

Falls nur solche Eigenwerte berechnet werden sollen, denen ausschliesslich Eigenlösungen ersten Grades entsprechen, so ergeben sich durch das Vorhandensein anderer Eigenwerte mit Eigen-

lösungen höheren Grades keine besonderen Schwierigkeiten.

Verfahren VI/VII.

Beispielsweise können die Verfahren nach Abschnitt VI und VII ohne weiteres zur Berechnung des grössten Eigenwertes benutzt werden, falls diesem, wie in dem Beispiel auf Seite 143 nur Eigenlösungen ersten Grades entsprechen. Mit

$$z = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \text{ ergibt sich } \mathfrak{A}\cdot z = \begin{pmatrix}9\\4\\11\end{pmatrix},\ \mathfrak{A}^2\cdot z = \begin{pmatrix}104\\88\\188\end{pmatrix},\ \mathfrak{A}^3\cdot z = \begin{pmatrix}1388\\1344\\2724\end{pmatrix},$$

also bereits nach 3 Näherungsschritten eine gute Annäherung an die genaue Lösung $\mathfrak{x}^{(1)} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

Entspricht jedoch auch dem zu berechnenden Eigenwert $\lambda_{(1)}$ eine Eigenlösung zweiten oder höheren Grades, so wird durch den Einfluss der Ergänzungsmatrizen die Konvergenz wesentlich verzögert, denn das Verhältnis der Koeffizienten, mit denen die Matrizen $\mathfrak{x}_{(1)}^{t_{(1)}-2}$ und $\mathfrak{x}_{(1)}^{t_{(1)}-1}$ in der Matrix $\mathfrak{A}^\nu$ enthalten sind, beträgt

$$\frac{\lambda_{(1)}^{\nu-t_{(1)}+2}\cdot\binom{\nu}{t_{(1)}-2}}{\lambda_{(1)}^{\nu-t_{(1)}+1}\cdot\binom{\nu}{t_{(1)}-1}} = \lambda_1\cdot\frac{t_{(1)}-1}{\nu-t_{(1)}+2}$$

Dieser Bruch konvergiert aber mit wachsendem ν nur sehr langsam gegen Null.

Verfahren IV,2.

Gleiches gilt für das Näherungsverfahren nach Abschnitt IV,2, bei dem, wie in Abschnitt VII, Seite 119 gezeigt, als ν-te Näherungslösung aus dem gegebenen Näherungswert λ' und der $(\nu-1)$-ten Näherungslösung $\mathfrak{x}^{(\nu)}$ der Vektor

$$\mathfrak{x}^{(\nu+1)} = \delta^{(\nu)}\cdot(\mathfrak{A}-\lambda'\mathfrak{E})^{-1}\cdot\mathfrak{x}^{(\nu)} = \kappa\cdot(\mathfrak{A}-\lambda'\mathfrak{E})^{-\nu}\cdot\mathfrak{x}'$$

errechnet wird. Die Matrix $(\mathfrak{A}-\lambda'\mathfrak{E})^{-\nu}$ kann gemäss Gleichung (151) ebenfalls durch die Einheits-Teilmatrizen $\mathfrak{x}_{(\omega)}$ und deren Ergänzungsmatrizen dargestellt werden und konvergiert, abgesehen von skalaren Faktoren, gegen die letzte nicht verschwindende Ergänzungsmatrix $\mathfrak{x}_{(\omega)}^{t_{(\omega)}-1} = (\mathfrak{A}-\lambda_{(\omega)}\mathfrak{E})^{t_{(\omega)}-1}\cdot\mathfrak{x}_{(\omega)}$ derjenigen Einheits-Teilmatrix $\mathfrak{x}_{(\omega)}$, deren Eigenwert $\lambda_{(\omega)}$ sich durch die kleinste Differenz $|\lambda_{(\omega)}-\lambda'|$ von dem benutzten Näherungswert λ' unterscheidet. Falls diesem Eigenwert nur Eigenlösungen ersten Grades entsprechen, so konvergiert $(\mathfrak{A}-\lambda'\mathfrak{E})^{-\nu}$ gegen $\mathfrak{x}_{(\omega)}$, und die Rechnung kann ohne besondere Schwierigkeiten durchgeführt werden. Entsprechen dagegen dem betreffenden (mehrfachen) Eigenwert auch Eigenlösungen höheren Grades, so enthält $(\mathfrak{A}-\lambda'\mathfrak{E})^{-\nu}$ ausser $\mathfrak{x}_{(\omega)}$ noch die entsprechenden Ergänzungsmatrizen, wodurch die Konvergenz ausserordentlich verzögert wird.

Verfahren IV,3.

Wird gemäss Abschnitt IV,3 für den gesamten Rechnungsgang eine und dieselbe Näherungslösung ξ', dagegen die jeweils neu errechneten verbesserten Näherungswerte $\lambda', \lambda'', \ldots, \lambda^{(\nu)}, \ldots$ benutzt, so ergeben sich u.U. noch ungünstigere Konvergenzbedingungen. Es kann selbst bei gut angenäherten Werten ξ' und λ' vorkommen, dass das Näherungsverfahren nicht nur schlecht konvergiert, sondern sogar divergiert.

Einem doppelten Eigenwert $\lambda_{(i)}$ möge beispielsweise eine Eigenlösung $\xi_{(i)}^{[2]}$ zweiten Grades entsprechen. Dann kann es zu diesem Eigenwert nur eine einzige Eigenlösung ersten Grades geben, nämlich $\xi_{(i)}^{[1]} = (\alpha - \lambda_{(i)}\varepsilon)\cdot \xi_{(i)}^{[2]}$. Denn alle aus $\xi_{(i)}^{[1]}$ und $\xi_{(i)}^{[2]}$ zusammengesetzten Vektoren sind ebenfalls Eigenlösungen zweiten Grades.

Die Gleichung $(\alpha - \lambda_{(i)}\varepsilon)\cdot\xi = 0$ besitzt also in diesem Fall nur eine einzige Lösung $\xi_{(i)}^{[1]}$. Die Matrix $(\alpha - \lambda_{(i)}\varepsilon)$ hat daher den Rang n-1; zwischen ihren n Spalten besteht nur eine einzige lineare Beziehung

$$\sum_{h=1,\ldots,n} (a_h - \lambda_{(i)} \cdot \alpha_h)\cdot x_h = 0 \quad ,$$

wenn a_h, α_h die Spalten der Matrizen α und ε, und x_h die entsprechenden Komponenten des Vektors $\xi_{(i)}^{[1]}$ sind. Ersetzt man eine an dieser linearen Beziehung beteiligte (also von den übrigen (n-1) Spalten linear abhängige) Spalte durch einen Vektor ξ', der nicht als lineare Zusammensetzung aus den übrigen (n-1) Spalten darstellbar ist, so erhält man eine Matrix vom Range n. Diese Bedingung erfüllt jeder Vektor ξ', der, gemäss Gleichung (144) in Eigenlösungsvektoren zerlegt, einen Anteil der Eigenlösung $\xi_{(i)}^{[2]}$ enthält.

In der auf Seite 40 abgeleiteten Gleichung (23)

$$\lambda^{(\nu+1)} = \lambda^{(\nu)} + \frac{D(\lambda^{(\nu)})}{G(\lambda^{(\nu)})}$$

enthält dann die Determinante $D(\lambda^{(\nu)})$ als Polynom von $\lambda^{(\nu)}$ den Faktor $(\lambda_{(i)} - \lambda^{(\nu)})^2$, dagegen besitzt die Determinante $G(\lambda^{(\nu)})$ unter den obigen Voraussetzungen bei $\lambda^{(\nu)} = \lambda_{(i)}$ überhaupt keine Nullstelle. Es ist also

$$\lambda^{(\nu+1)} = \lambda^{(\nu)} + (\lambda_{(i)} - \lambda^{(\nu)})^2 \cdot Q(\lambda^{(\nu)}) \quad ,$$

worin $Q(\lambda^{(\nu)})$ eine Funktion von $\lambda^{(\nu)}$ ist, die für $\lambda^{(\nu)} = \lambda_{(i)}$ einen endlichen Wert und folglich auch einen eindeutigen Differentialquotienten besitzt. Der Differentialquotient

$$\frac{d(\lambda^{(\nu+1)} - \lambda^{(\nu)})}{d\lambda^{(\nu)}} = (\lambda_{(i)} - \lambda^{(\nu)})^2 \cdot Q'(\lambda^{(\nu)}) - 2\cdot(\lambda_{(i)} - \lambda^{(\nu)})\cdot Q(\lambda^{(\nu)})$$

wechselt daher beim Durchlaufen des Wertes $\lambda^{(\nu)} = \lambda_{(i)}$ sein Vorzeichen. Der Differentialquotient

$$\frac{d\lambda^{(\nu+1)}}{d\lambda^{(\nu)}} = 1 + \frac{d}{d\lambda^{(\nu)}}\left\{(\lambda_{(i)}-\lambda^{(\nu)})^2 \cdot Q(\lambda^{(\nu)})\right\}$$

ist also in der Nähe von $\lambda^{(\nu)} = \lambda_{(i)}$ auf der einen Seite kleiner, auf der anderen grösser als 1. Das bedeutet, wie auf Seite 120 gezeigt, dass das Verfahren in einem Falle langsam konvergiert, im anderen divergiert, und zwar auch dann, wenn der benutzte Näherungswert λ' sich beliebig wenig von dem genauen Wert $\lambda_{(i)}$ unterscheidet.

Da eine Voraussage, ob das Verfahren konvergiert oder divergiert im allgemeinen nicht möglich ist, und da auch im Falle einer Konvergenz eine sehr umfangreiche Rechnung erforderlich wäre, ist das Verfahren für die Berechnung mehrfacher Eigenwerte, denen auch Eigenlösungen höheren Grades entsprechen, ungeeignet.

Verfahren IV,5.

Werden nach Abschnitt IV,5 sowohl die verbesserten Näherungslösungen $\mathfrak{x}^{(\nu)}$ als die verbesserten Werte $\lambda^{(\nu)}$ für die weitere Näherungsrechnung benutzt, so sind die Konvergenzbedingungen wesentlich günstiger, allerdings auch der Arbeitsaufwand grösser als bei dem Verfahren nach IV,2 und 3. Nach ν Näherungsschritten erhält man, von skalaren Faktoren abgesehen, den Vektor

$$\mathfrak{x}^{(\nu+1)} = (\mathfrak{A}-\lambda'\mathfrak{E})^{-1}\cdot(\mathfrak{A}-\lambda''\mathfrak{E})^{-1}\cdot\ldots\cdot(\mathfrak{A}-\lambda^{(\nu)}\mathfrak{E})^{-1}\cdot\mathfrak{x}' \quad , \qquad (154)$$

wobei in den Matrizen $(\mathfrak{A}-\lambda^{(\nu)}\mathfrak{E})^{-1}$ mit wachsendem ν und zunehmender Annäherung des Wertes $\lambda^{(\nu)}$ an den gesuchten Eigenwert $\lambda_{(i)}$ die letzte Ergänzungsmatrix $\mathfrak{E}_{(i)}^{t_{(i)}-1}$ der dem Eigenwert $\lambda_{(i)}$ entsprechenden Einheits-Teilmatrix $\mathfrak{E}_{(i)}$ immer stärker hervortritt.

Verfahren VIII.

Das Verfahren nach Abschnitt VIII kommt bei Matrizen mit Eigenlösungen höheren Grades deswegen nicht in Betracht, weil die Anwendbarkeit dieses Verfahrens grundsätzlich auf solche n-reihigen Matrizen beschränkt ist, in denen n voneinander unabhängige Eigenlösungen ersten Grades in ausreichender Annäherung bekannt sind; das ist natürlich nicht möglich, wenn eine Matrix auch Eigenlösungen höheren Grades und daher weniger als n Eigenlösungen ersten Grades besitzt.

Verfahren V.

Im Gegensatz zu diesen Näherungsverfahren kann das Verfahren V ohne weiteres auch dann angewandt werden, wenn die zu untersuchende Matrix $\mathfrak{A}$ Eigenlösungen höheren Grades besitzt.

Ein beliebiger Vektor $\mathfrak{z}_1$ kann nach der Gleichung

$$\mathfrak{z}_1 = \sum_{i=1,\ldots,m}(\mathfrak{E}_{(i)}\cdot\mathfrak{z}_1) = \sum_{i=1,\ldots,m}\mathfrak{E}_{(i)}^{[t_{(i)}]} \qquad (155)$$

eindeutig in Eigenlösungen ersten oder höheren Grades zerlegt werden, die den m verschiedenen Eigenwerten $\lambda_{(i)}$ $(i=1,\dots,m)$ entsprechen.

In jedem Fall gibt es ein bestimmtes Polynom der Matrix α

$$\psi(\alpha) = \prod_{i=1,\dots,m} (\alpha - \lambda_{(i)}\xi)^{t_{(i)}} = \alpha^{\nu} + c_1\alpha^{\nu-1} + \dots + c_{\nu-1}\alpha + c_\nu\xi \,, \quad (156)$$

worin $\lambda_{(i)}$ die m voneinander verschiedenen Eigenwerte sind und $t_{(i)}$ der Grad der in z_1 enthaltenen, dem Eigenwert $\lambda_{(i)}$ entsprechenden Eigenlösung $z_{(i)} = \xi_{(i)} \cdot z_1$ ist. Für einen Eigenwert $\lambda_{(i)}$, dessen Eigenlösungen in z_1 überhaupt nicht enthalten sind, ist $t_{(i)} = 0$ zu setzen.

Das Polynom $\psi(\alpha)$ erfüllt dann nach (155), (156) und (136) die Gleichung

$$\psi(\alpha)\cdot z_1 = \prod_{i=1,\dots,m} (\alpha - \lambda_{(i)}\xi)^{t_{(i)}} \cdot \sum_{i=1,\dots,m} \xi_{(i)}^{[t_{(i)}]} = 0 \,,$$

also

$$\alpha^{\nu} z_1 + c_1 \alpha^{\nu-1} z_1 + \dots + c_{\nu-1}\alpha z_1 + c_\nu z_1 = 0. \quad (157)$$

$\psi(\alpha)$ ist zugleich das niedrigste Polynom der Matrix α, das mit z_1 multipliziert 0 ergibt. Denn nur ein solches Polynom der Matrix α, das für jeden Eigenwert $\lambda_{(i)}$ den Faktor $(\alpha - \lambda_{(i)}\xi)^{t_{(i)}}$ enthält, kann bei Multiplikation mit $z_1 = \sum \xi_{(i)}^{[t_{(i)}]}$ die hierin enthaltene Eigenlösung $t_{(i)}$-ten Grades $\xi_{(i)}^{[t_{(i)}]}$ zum Verschwinden bringen. Ist gemäss Gleichung (156) $\psi(\alpha)$ ein Polynom ν-ten Grades, so kann es also kein Polynom $\psi'(\alpha)$ geringeren, beispielsweise $(\nu-1)$-ten Grades geben, das die Bedingung

$$\psi'(\alpha)\cdot z_1 = \alpha^{\nu-1} z_1 + c_1'\cdot\alpha^{\nu-2} z_1 + \dots + c_{\nu-2}'\cdot\alpha z_1 + c_{\nu-1}' z_1 = 0$$

erfüllt. Die ν Vektoren $z_1, \alpha\cdot z_1, \dots, \alpha^{\nu-1}\cdot z_1$ sind also voneinander unabhängig, und der Vektor $\alpha^{\nu}\cdot z_1$ gemäss Gleichung (157) von diesen linear abhängig. Aus dem durch die Vektorgleichung (157) gegebenen linearen Gleichungssystem können also die ν Koeffizienten $c_1, c_2, \dots, c_\nu$ eindeutig berechnet werden.

Die Auflösung der Gleichung

$$\psi(x) = 0 \quad (158)$$

ergibt dann entsprechend Gleichung (156) die $t_{(i)}$-fachen Wurzeln $\lambda_{(i)}$. Für den $p_{(i)}$-fachen Eigenwert der Matrix α erhält man also eine $t_{(i)}$-fache Wurzel $(t_{(i)} \leqq p_{(i)})$ der Gleichung (158); und zwar ist $t_{(i)} < p_{(i)}$, wenn entweder dem Eigenwert $\lambda_{(i)}$ noch eine in z_1 nicht enthaltene Eigenlösung höheren als $t_{(i)}$-ten Grades entspricht, oder auch dann, wenn dem Eigenwert $\lambda_{(i)}$ zwei oder mehr Eigenlösungen ersten Grades entsprechen (vgl. Seite 146).

Es sei noch bemerkt, dass man in ähnlicher Weise wie in Abschnitt V gezeigt, auch die in dem Vektor y_1 enthaltenen Eigenlösungen ersten und höheren Grades mit geringem Arbeitsaufwand berechnen kann. Bei der geringen praktischen Bedeutung des hier betrachteten Sonderfalles kann davon abgesehen werden, hierauf näher einzugehen.

C. Eigenwerte gleicher Grösse, aber verschiedenen Vorzeichens.

Haben zwei Eigenwerte zwar die gleiche absolute Grösse, aber verschiedene Vorzeichen, so können die meisten Verfahren genau in der gleichen Weise verwendet werden, wie bei verschieden grossen Eigenwerten.

1. Konjugiert komplexe Eigenwerte.

Die Matrix $\mathfrak{A}$ möge z.B. zwei konjugiert komplexe Eigenwerte besitzen

$$\lambda_1 = \alpha + j\beta \quad , \lambda_2 = \alpha - j\beta \; . \qquad (j = \sqrt{-1})$$

Die Verfahren I bis III und V sind auch in diesem Fall ohne weiteres anwendbar. Auch die Näherungsverfahren nach Abschnitt IV und VIII können an sich verwendet werden, allerdings entsprechen bei einer Matrix mit reellen Elementen den konjugiert komplexen Eigenwerten auch konjugiert komplexe Eigenlösungen $\mathfrak{x}_{1,2} = u \pm jv$.

$$\left(\mathfrak{A} - (\alpha \pm j\beta)\mathfrak{E}\right)\cdot(u \pm jv) = 0 \; .$$

Auch die Näherungsrechnung muss mindestens teilweise mit komplexen Zahlen durchgeführt werden und ist daher ziemlich umständlich.

Noch weniger eignen sichnzur Berechnung komplexer Eigenwerte die in den Abschnitten VI und VII behandelten Verfahren. Wie bereits ausgeführt, ist eine Verwendung dieser Verfahren nur dann zu empfehlen, wenn irgendwelche Anhaltspunkte von vorn herein darauf hindeuten, dass die Rechnung rasch konvergiert, insbesondere also dann, wenn der grösste Eigenwert der Matrix alle anderen so beträchtlich überragt, dass bereits die vorliegende Matrix mehr oder weniger annähernd parallele Spalten besitzt.

Sind die beiden grössten Eigenwerte λ_1, λ_2 der Matrix konjugiert komplex, so ist diese Voraussetzung nicht erfüllt. Den beiden Eigenwerten λ_1, λ_2 , von denen jeder nur einmal unter den Wurzeln der Säkulargleichung vorkommen möge, entsprechen dann, falls die Elemente der Matrix reell sind, auch konjugiert komplexe Einheits-Teilmatrizen

$$\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{R} + j\mathfrak{J} \quad , \quad \mathfrak{E}_2 = \mathfrak{R} - j\mathfrak{J} \; ,$$

die im übrigen die für Einheits-Teilmatrizen allgemein gültigen Eigenschaften (126), (128) besitzen. Es ist also *)

$$t_1 \cdot t_2 = (\mathcal{R}^2+\mathcal{J}^2)+j(\mathcal{J}\mathcal{R}+\mathcal{R}\mathcal{J})=0 \quad ; \quad t_1^2 - t_1 = (\mathcal{R}^2-\mathcal{J}^2-\mathcal{R})+j(\mathcal{J}\mathcal{R}+\mathcal{R}\mathcal{J}+\mathcal{J})=0.$$

In der potenzierten Matrix

$$\mathfrak{A}^\nu = \left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)^\nu \cdot \left(\left(\frac{\alpha+j\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)^\nu t_1 + \left(\frac{\alpha-j\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)^\nu t_2 + \left(\frac{\lambda_3}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)^\nu t_3 + \cdots \right)$$

verschwinden bei genügend hohem Exponenten ν alle Anteile $\left(\frac{\lambda_i}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)^\nu t_i$ für $|\lambda_i| < |\lambda_1|$ gegenüber den Anteilen der Teilmatrizen t_1 und t_2. Bei sehr hohem ν ist also

$$\left(\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)^\nu = e^{j\nu\cdot \operatorname{arctg} \beta/\alpha}\cdot(\mathcal{R}+j\mathcal{J}) + e^{-j\nu\cdot\operatorname{arctg}\beta/\alpha}\cdot(\mathcal{R}-j\mathcal{J})$$

$$= 2\mathcal{R}\cdot\cos(\nu\cdot\operatorname{arctg}\beta/\alpha) - 2\mathcal{J}\cdot\sin(\nu\cdot\operatorname{arctg}\beta/\alpha)\,. \qquad (159)$$

Dieser Ausdruck ändert sich mit wachsendem Exponenten ν ohne dabei einem Grenzwert zuzustreben.

2. Entgegengesetzt gleiche Eigenwerte.

Auch dann, wenn die beiden grössten Eigenwerte bei gleicher absoluter Grösse entgegengesetzte Vorzeichen haben, also im Falle $\lambda_2 = -\lambda_1$, konvergiert die Matrix

$$\mathfrak{A}^\nu = \sum_{i=1,\dots,n} \lambda_i^\nu t_{0i} = \lambda_1^\nu t_{01} + (-\lambda_1)^\nu t_{02} + \lambda_3^\nu \cdot t_{03} + \cdots$$

(unter der Voraussetzung, dass mehrfache Eigenwerte mit Eigenlösungen höheren Grades nicht vorliegen) nicht eindeutig. Denn je nachdem, ob ν gerade oder ungerade ist, erhält man

$$\lim_{\nu\to\infty}\left(\frac{\mathfrak{A}}{\lambda_1}\right)^\nu = t_{01} \pm t_{02}\,. \qquad (160)$$

In diesem Fall ist allerdings eine Trennung der beiden Elementarmatrizen in einfacher Weise möglich. Ist z.B. aus geraden Potenzen von $\mathfrak{A}$ die Matrix $t_{01}+t_{02}$ und aus

$$\mathfrak{A}^2\cdot(t_{01}+t_{02}) = \lambda_1^2\cdot(t_{01}+t_{02})$$

der Eigenwert λ_1 berechnet, so ergeben sich mit

$$t_{01} - t_{02} = \frac{1}{\lambda_1}\cdot\mathfrak{A}(t_{01}+t_{02})$$

die beiden Elementarmatrizen

$$t_{01} \text{ bezw. } t_{02} = \tfrac{1}{2}(t_{01}+t_{02}) \pm \tfrac{1}{2}(t_{01}-t_{02})\,.$$

---

*) Hieraus folgt übrigens

$$\mathcal{R}^2 = \tfrac{1}{2}\mathcal{R}\,,\quad \mathcal{J}^2 = -\tfrac{1}{2}\mathcal{R}\,,\quad \mathcal{J}\cdot\mathcal{R} = \mathcal{R}\cdot\mathcal{J} = +\tfrac{1}{2}\mathcal{J}\,.$$

X. Vergleichende Gegenüberstellung der verschiedenen Verfahren.

Im Hinblick auf die grosse Zahl und Verschiedenheit der Verfahren, die zur Berechnung der Eigenwerte und gegebenenfalls auch der Eigenlösungen benutzt werden können, erhebt sich die Frage: Welches von diesen Verfahren ist das vorteilhafteste und führt am schnellsten und zuverlässigsten zu dem gesuchten Ergebnis?

Es wurde bereits in der Einleitung darauf hingewiesen, dass diese Frage nicht etwa in dem Sinne beantwortet werden kann, dass irgendein bestimmtes Verfahren unter allen Umständen allen anderen Verfahren vorzuziehen sei.

Eine Abzählung der bei jedem einzelnen Verfahren erforderlichen Rechenoperationen gibt zwar einen Ueberblick über den erforderlichen Arbeitsaufwand, genügt aber allein noch nicht zur Beurteilung der Vor- und Nachteile der einzelnen Verfahren. Je nach der gestellten Aufgabe und den Eigenschaften der gegebenen Matrix kommen u.U. verschiedene Verfahren in Betracht. Ferner sind die zur Verfügung stehenden rechnerischen Hilfsmittel und die Fähigkeiten des Rechners zu berücksichtigen. Auch die an die Genauigkeit der Ergebnisse gestellten Anforderungen müssen bei der Auswahl des Verfahrens beachtet werden.

1. Die Anzahl der erforderlichen Rechenoperationen.

Fast alle bei der Ermittlung der Eigenwerte und Eigenlösungen in Betracht kommenden Rechnungen, insbesondere Eliminationsrechnungen, Produktbildungen aus Matrizen und Vektoren usw., setzen sich in irgendeiner Weise aus den 4 Grundoperationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) zusammen. Man kann daher den erforderlichen Arbeitsaufwand im voraus abschätzen, indem man die Anzahl der erforderlichen Rechenoperationen bestimmt.

Die Multiplikationen und Divisionen bilden im allgemeinen den grössten Teil der Rechenarbeit. Die Anzahl der einzelnen Multiplikationen und Divisionen gibt daher einen Anhalt für den erforderlichen Arbeitsaufwand. Die Additionen und Subtraktionen sind für die Beurteilung des Arbeitsaufwandes von geringerer Bedeutung, und zwar aus folgenden Gründen:

1.) Die Anzahl der erforderlichen Additionen und Subtraktionen ist meistens geringer als die der Multiplikationen und Divisionen (vgl. z.B. Seite 5...8)

2.) Bei dieser Zählung sind Summen aus m Zahlen wie (m-1) Summen aus je 2 Zahlen gewertet; in Wirklichkeit ist der Arbeitsaufwand geringer.

	Siehe Seite	n = 3	4	5	6	7	8
A. Verfahren zur Umformung der Säkulargleichung							
Abschnitt Ia	5	13	81	536	3955	23754	302393
b	6	12	46(45)	145	411	1092	2780
c	8	19	54	113	213	-	-
d	13	13	38	84	159	265	411
IIa	20	13	42	109	254	557	1178
b	22	12	42	116	282	636	1370
III 1	27	14	57	157	348	672	1179
einzelne Determ.	26	9	22	43	74	117	174
V	61	26	68	140	250	406	616
B. Ermittlung der Eigenlösungen							
1 Eigenlösung		6	17	36	65	106	161
desgl. nach V	63	4	11	21	34	50	69
Vorschlag Dr Zech		5	11	19	29	41	55
n Eigenlösungen		18	68	180	390	742	1288
desgl. nach V		12	42	97	184	310	482
C. Näherungsverfahren							
IV, 1 (1. Näh.-Schritt)		23	48	85	136	203	288
2	47	7	13	21	31	43	57
3 (2. Näh.-Schritt)	47	7	16	28	47	71	104
5	47	21	45	81	131	197	281
VIII, symm. Matr.	134	90	208	400	684	1078	1600
unsymm."	134	99	240	475	828	1323	1984
D. Mult. v. Matrizen und Vektoren							
VI, VII $\alpha \cdot \xi$		9	16	25	36	49	64
VI $\alpha \cdot \xi_\nu$ (symm.)		24	58	115	201	322	484
" (unsymm.)		27	64	125	216	343	512
VII α^2 (symm.)		15	34	65	111	175	260
" (unsymm.)		24	58	115	201	322	484

3.) Bei Verwendung von Rechenmaschinen ist für Summenbildungen oft überhaupt keine zusätzliche Arbeit erforderlich, weil die als Produkte errechneten Summanden sich im Ergebnis- oder Speicherwerk der Maschine von selbst addieren.

Die Anzahlen der erforderlichen Multiplikationen und Divisionen, die bei der Behandlung der einzelnen Verfahren bereits erörtert wurden, sind auf Seite 157 noch einmal zur Uebersicht zusammengestellt.

Diejenigen Verfahren, die im wesentlichen dem gleichen Zweck dienen, sind je in einer Gruppe zusammengefasst. Die Verfahren der Gruppe A dienen im wesentlichen dem Ausmultiplizieren der Säkulargleichung, also der Umwandlung der Säkulardeterminante (Gleichung 2) in eine Potenzreihe (Gleichung 3). Hierzu gehören die Verfahren der Abschnitte I, II und III 1, ferner auch das Verfahren nach Abschnitt V, soweit es zur Berechnung der Eigenwerte benutzt wird.

Bei dem Verfahren nach Abschnitt II ist ausser dem gewöhnlichen Verfahren (a) mit gebrochenen Koeffizienten auch das auf Seite 21...22 erwähnte Ganzzahlenverfahren (b) berücksichtigt, wobei als Rechenoperationen nur die Multiplikationen gezählt sind, nicht dagegen die als Rechenproben zu wertenden Kürzungen. Die zu III angegebenen Zahlen gelten für den Fall, dass (n-2) Determinanten $D(\alpha_i)$ berechnet werden müssen; ist eine Determinante $D(\alpha_i)$ im voraus bekannt, so vermindert sich der noch erforderliche Arbeitsaufwand um die ebenfalls in obiger Tabelle angegebene Anzahl von Multiplikationen und Divisionen, die zur Berechnung einer gewöhnlichen Determinante n-ter Ordnung gebraucht werden.

Unter B ist der zur Berechnung der Eigenlösungen erforderliche Arbeitsaufwand angegeben. Das elementare Verfahren besteht in der Auflösung eines homogenen Gleichungssystems mit n Unbekannten. Der in Abschnitt V angegebene Weg im Anschluss an die Berechnung der Eigenwerte erfordert einen wesentlich geringeren Arbeitsaufwand.

Die Gruppe C umfasst die Näherungsverfahren der Abschnitte IV und VIII, bei denen näherungsweise bekannte Eigenwerte und Eigenlösungen zur Berechnung verbesserter Näherungen benutzt werden.

Als Gruppe D sind schliesslich die in Abschnitt VI und VII behandelten Näherungsverfahren angeführt. Bei diesen ist der Umfang des erforderlichen Arbeitsaufwandes hauptsächlich durch die Anzahl der erforderlichen Näherungsschritte bestimmt. Um auch hier einen Vergleich mit anderen Verfahren zu ermöglichen, ist die Anzahl der Einzelmultiplikationen für die Produktbildung aus einem Vektor und einer Matrix bzw. aus 2 Matrizen angegeben.

Die obige Tabelle zeigt, dass das Eliminationsverfahren nach Abschnitt Id eine bedeutend geringere Anzahl von Multiplikationen und Divisionen fordert als die meisten anderen Verfahren. Für das Ausmultiplizieren der Säkulardeterminante sind demnach weniger Multiplikationen und Divisionen erforderlich als beispielsweise für die Produktbildung aus zwei Matrizen. Trotzdem bieten u.U. auch andere Verfahren wesentliche Vorteile.

2. Die gesuchten Eigenwerte und Eigenlösungen.

Für die Auswahl eines geeigneten Verfahrens ist es vor allen Dingen wichtig, ob sämtliche oder nur einzelne Eigenwerte und gegebenenfalls auch Eigenlösungen berechnet werden sollen. Für die Bestimmung einzelner Eigenwerte eignen sich oft Näherungsverfahren (z.B. gemäss Abschnitt III 2, IV, VI und VII). Für die Ermittlung sämtlicher Eigenwerte ist es im allgemeinen zweckmässig, die Säkulargleichung nach einem der unter Gruppe A zusammengestellten Verfahren (I, II, IIIl, V) auszumultiplizieren und hieraus die n Eigenwerte zu berechnen. Die Näherungsverfahren IV und VIII können dann gegebenenfalls noch zur Verbesserung nicht genügend genauer Ergebnisse verwendet werden.

Falls ausser den Eigenwerten auch die entsprechenden Eigenlösungen gesucht sind, so wird man diejenigen Verfahren bevorzugen, bei denen auch die Berechnung der Eigenlösungen mit möglichst geringem Arbeitsaufwand durchgeführt werden kann. Hierfür eignet sich, wenn sämtliche Eigenwerte und Eigenlösungen bestimmt werden sollen, besonders das Verfahren nach Abschnitt V.

3. Eigenschaften der Matrix.

Die Eigenschaften der durch das Gleichungssystem (1) bzw. durch die Säkulardeterminante (2) gegebenen Matrix

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

sind oft entscheidend für die Auswahl eines geeigneten Berechnungsverfahrens.

a) Elemente $a_{ik} = 0$.

Oft wird ein Teil der Elemente $a_{ik} = 0$ sein. In diesem Falle vermindert sich der Arbeitsaufwand bei sämtlichen Verfahren, aber bei den einzelnen Verfahren in verschiedenem Masse. Sind z.B. ausserhalb der beiden Schrägreihen, die die Hauptdiagonale der Matrix umgeben, sämtliche Elemente $a_{ik} = 0 \quad (|i-k| \geq 2)$, so kann das unter Ia behandelte Ausmultiplizieren der einzelnen Glieder der

Säkulardeterminante angewandt werden, denn von den n ! Gliedern sind dann nur

$$1 + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \dots = \frac{(\sqrt{5}+1)^{n+1} + (\sqrt{5}-1)^{n+1}}{\sqrt{5} \cdot 2^{n+1}}$$

Glieder von Null verschieden, also

bei n	=	2	3	4	5	6	7	8	10	15
statt n!	=	2	6	24	120	720	5040	40320	.....	
nur		2	3	5	8	13	21	34	89	987

Glieder, wobei gemäss Abschnitt Ib noch gewisse Vereinfachungen möglich sind.

Auch das Eliminationsverfahren nach Id erfordert in diesem Sonderfall nur einen verhältnismässig geringen Arbeitsaufwand. Statt der auf Seite 12 ... 13 ermittelten Zahlen brauchen nur

$\frac{(3n-7)(n+4)}{2} + 1$ Produkte oder Quotienten

aus je zwei Zahlen berechnet zu werden. Besonders bequem lassen sich bei einer derartigen Matrix einzelne Determinanten berechnen, wofür nur 3(n-1) Einzelmultiplikationen und -divisionen erforderlich sind. Daher können auch die in Abschnitt III beschriebenen Verfahren oft mit Vorteil verwendet werden.

b) Symmetrieeigenschaften.

Ferner können Symmetrieeigenschaften der Matrix oft bei der Berechnung der Eigenwerte ausgenutzt werden. Eine zur Hauptdiagonale symmetrische Matrix ($a_{iK} = a_{Ki}$ für $i, K = 1, 2, \dots n$) ergibt z.B., wenn man sie mit sich selbst multipliziert, wieder eine symmetrische Matrix, von deren n^2 Elementen demnach nur $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$ berechnet zu werden brauchen. Auch bei anderen Umformungen, beispielsweise bei der Anwendung von Eliminationsverfahren bleibt bei geeigneter Anordnung der Rechnung die Symmetrie oft erhalten.

Eine Matrix, die zu beiden Diagonalen symmetrisch ist, kann durch eine einfache Umformung in zwei Matrizen geringerer Ordnung gespalten werden, indem man in dem Gleichungssystem (1) anstelle der Unbekannten $x_1, x_2, \dots, x_n$ die neuen Unbekannten

$$z_1 = \frac{x_1 + x_n}{2}, \quad z_2 = \frac{x_2 + x_{n-1}}{2}, \dots, z_i = \frac{x_i + x_{n+1-i}}{2}, \dots \left(i \leq \frac{n+1}{2}\right)$$

und

$$z_n = \frac{x_1 - x_n}{2}, \quad z_{n-1} = \frac{x_2 - x_{n-1}}{2}, \dots, z_{n-i} = \frac{x_i - x_{n+1-i}}{2}, \dots \left(i < \frac{n+1}{2}\right)$$

einführt.

c.) Matrizen mit dem ein- oder mehrfachen Eigenwert Null.

Die Ueberführung einer Matrix in eine Matrix geringerer Ordnung ist auch dann möglich und im allgemeinen zu empfehlen, wenn man aufgrund irgendwelcher Umstände erkennt, dass die gegebene Matrix den ein- oder mehrfachen Eigenwert Null besitzt.
Die dem Eigenwert $\lambda = 0$ entsprechende Eigenlösung ξ_0 (bzw. bei mehrfachem Eigenwert 0 mehrere Eigenlösungen) findet man durch Auflösung des homogenen Gleichungssystems $\mathfrak{A} \cdot \xi_0 = 0$. In der Gleichung $(\mathfrak{A} - \lambda \mathfrak{E}) \xi = 0$ kann dann $\xi = a \cdot \xi_0 + z$ gesetzt werden, worin z ein neuer unbekannter Vektor ist, in dem jedoch eine der n Komponenten, z.B. die Komponente z_1 fehlt:

$$\xi = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x_{01} \\ a \cdot x_{02} + z_2 \\ \cdots\cdots \\ a \cdot x_{0n} + z_n \end{pmatrix}.$$

Als n-te Unbekannte erscheint hierin noch der skalare Faktor a, der jedoch aus der Gleichung

$$(\mathfrak{A} - \lambda \mathfrak{E}) \cdot (a \cdot \xi_0 + z) = (\mathfrak{A} - \lambda \mathfrak{E}) \cdot z - a \cdot \lambda \cdot \xi_0$$

mit geringem Arbeitsaufwand eliminiert werden kann; hierfür sind nur $(n-1)$ Divisionen und $(n-1)^2$ Multiplikationen erforderlich.

Die gleiche Umformung in eine Matrix geringerer Ordnung empfiehlt sich übrigens oft auch dann, wenn ein beliebiger Eigenwert der Matrix samt der entsprechenden Eigenlösung bekannt ist.

d.) Ungeordnete Gleichungssysteme.

Anstelle des gemäss Gleichung (1) geordneten Gleichungssystems wird oft zunächst ein Gleichungssystem der allgemeineren Form gegeben sein

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda b_{11}) x_1 + \ldots\ldots + (a_{1n} - \lambda b_{1n}) x_n &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ (a_{n1} - \lambda b_{n1}) x_1 + \ldots\ldots + (a_{nn} - \lambda b_{nn}) x_n &= 0 \end{aligned} \qquad (161)$$

oder in Matrizen - Schreibweise

$$(\mathfrak{A} - \lambda \mathfrak{B}) \cdot \xi = 0 \qquad (161')$$

Ein solches "ungeordnetes" Gleichungssystem kann in ein gemäss (1) geordnetes Gleichungssystem

$$(\mathfrak{B}^{-1} \cdot \mathfrak{A} - \lambda \mathfrak{E}) \cdot \xi = 0 \qquad (162)$$

umgeformt werden, indem man alle ausserhalb der Hauptdiagonale stehenden Koeffizienten von λ, also alle b_{ik} $(i \neq k)$ eliminiert. (Man dividiere z.B. die erste Gleichung durch b_{11} und addiere sie, mit $-b_{i1}$ $(i=2,\ldots,n)$ multipliziert, zu der i-ten Gleichung usw). Für diese Umformung sind, falls alle a_{ik} und $b_{ik} \neq 0$ sind, $\frac{3n-1}{2} \cdot n^2$ Multiplikationen und Divisionen erforderlich.

Der Arbeitsaufwand verringert sich u.U. wesentlich, wenn ein Teil der Elemente in einer der beiden Matrizen = 0 ist. Sind z.B. in der Matrix $\mathfrak{B}$ ausser der Hauptdiagonale und den beiden die Hauptdiagonale einschliessenden Schrägreihen sämtliche Elemente $b_{ik}=0 \quad (|i-k| \geq 2)$, so genügen für die Umformung in das Gleichungssystem (1) $3n^2-2$ Multiplikationen und Divisionen. Diese Zahl verringert sich auf $2n^2+3n-4$, falls für alle $|i-k| \geq 2$ auch $a_{ik}=0$ ist. Falls in der Matrix $\mathfrak{A}$ mehr Elemente den Wert 0 besitzen als in der Matrix $\mathfrak{B}$, so ist es im allgemeinen zweckmässig, durch Elimination der ausserhalb der Hauptdiagonale stehenden Elemente a_{ik} statt (162) die Matrix $(\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{B}-\lambda\mathfrak{E})$ zu bestimmen.

Für einen Teil der beschriebenen Verfahren sind solche Umformungen nicht notwendig, sondern man kann unter geringen Abänderungen einzelner Verfahren unmittelbar das Gleichungssystem (161) verwenden. Das gilt besonders für die Verfahren der Abschnitte I, III und IV.

Die Anzahl der für die Umformung des Gleichungssystems (161) erforderlichen Multiplikationen und Divisionen ist in folgender Tabelle zusammengestellt. Zum Vergleich sind die entsprechenden Zahlen zur Berechnung einer gewöhnlichen Determinante hinzugesetzt. Diese zeigen, dass die bei dem Verfahren nach Abschnitt III zu berechnenden Determinanten u.U. einen geringeren Arbeitsaufwand erfordern, als die Umformung des Gleichungssystems.

n =	2	3	4	5	6	7	8
Umformung von Gleichung(161) in Gleichung (1)	Anzahl der erforderl.Mult.und Div.						
Alle a_{ik} und $b_{ik} \neq 0$	10	36	88	175	306	490	736
$b_{ik}=0$ für $\|i-k\| \geq 2$	10	25	46	73	106	145	190
$a_{ik}=b_{ik}=0$ " " "	10	23	40	61	86	115	148
Berechnung einer Determinante							
Alle $a_{ik} \neq 0$	2	9	22	43	74	117	174
$a_{ik}=0$ für $\|i-k\| \geq 2$	2	5	8	11	14	17	20

e.) Weitere besondere Eigenschaften der Matrix.

Weitere, für die Auswahl des Berechnungsverfahrens u.U. wichtige Eigenschaften der Matrix sind z.B.:

angenäherte Proportionalität zwischen den einzelnen Spalten der Matrix (Eignung für die Anwendung der Verfahren nach Abschnitt VI und VII);

kleine ganzzahlige Elemente (man wird dann solche Verfahren bevorzugen, bei denen möglichst die gesamte Rechnung mit ganzen Zahlen durchgeführt werden kann);

starkes Hervortreten der Hauptdiagonal-Elemente gegenüber den anderen Elementen der betreffenden Spalten und Zeilen (u.U. Anwendung der Näherungsverfahren nach Abschnitt IV oder VIII, wobei die Spalten der Einheitsmatrix als erste Annäherung für die Eigenlösungen betrachtet werden können).

4. Vermeidung von Rechenfehlern.

Besonders wichtig ist es, dass Rechenfehler vermieden werden. Aus diesem Grunde ist ein möglichst einfacher und übersichtlicher Rechnungsgang in jedem Fall erwünscht. Das Eliminationsverfahren nach Id, dessen Anwendung immerhin eine ziemlich angespannte Aufmerksamkeit erfordert, ist daher trotz des verhältnismässig geringen notwendigen Arbeitsaufwandes nicht in allen Fällen zu empfehlen. Fähigkeiten und Uebung des Rechners spielen hier eine wesentliche Rolle.

Ferner ist zur Vermeidung von Rechenfehlern eine laufende Ueberwachung der Rechnung und besonders eine Nachprüfung der Endergebnisse durch geeignete Proben zweckmässig. Ein ganz sicherer Rechner wird u.U. auf Zwischenproben, vielleicht sogar auch auf die Endproben verzichten können. Bei wichtigen Rechnungen sind allerdings Endproben meistens auch zur Nachprüfung der erreichten Genauigkeit unerlässlich.

Die einfachste und zugleich zuverlässigste Endprobe besteht in dem Einsetzen des errechneten Eigenwertes λ_i und der entsprechenden Eigenlösung ξ_i in die Gleichung $(\alpha - 1\lambda)\cdot\xi = 0$. Diese Probe ergibt zugleich den Vorteil, dass etwa festgestellte Abweichungen in einfacher Weise nach Abschnitt IV zur nachträglichen Verbesserung der Genauigkeit benutzt werden können. Voraussetzung für die Anwendbarkeit dieser Probe ist, dass ausser den Eigenwerten auch die entsprechenden Eigenlösungen berechnet werden, wofür sich das Verfahren nach Abschnitt V besonders eignet.

Zwischenproben zur laufenden Ueberwachung der Rechnung können in bekannter Weise z.B. als Summenproben, in gewissen Fällen auch als Teilbarkeitsproben (vgl. Seite 21) durchgeführt werden. Summenproben eignen sich besonders zur Ueberwachung von Eliminationsrechnungen und gewährleisten einen ziemlich sicheren Schutz gegen eigentliche Rechenfehler, bei zweckmässiger Anordnung auch z.B. gegen Vorzeichenfehler. Bei einzelnen Verfahren können jedoch auch Fehler vorkommen, die durch diese Proben nicht ohne weiteres erfasst werden, beispielsweise Verwechselung von λ -Potenzen bei Verfahren I d.

Durch derartige Proben erhöht sich der für die einzelnen Verfahren erforderliche Arbeitsaufwand u.U. beträchtlich.

5. Berücksichtigung der technischen Hilfsmittel.

Die für die einzelnen Verfahren ermittelten Anzahlen von einzelnen Multiplikationen und Divisionen geben besonders dann ein ziemlich zutreffendes Mass für den insgesamt erforderlichen Arbeitsaufwand, wenn die Rechnung ohne die Benutzung irgendwelcher technischen Hilfsmittel durchgeführt wird. Bei gewöhnlichem schriftlichen Rechnen erfordern die einzelnen Multiplikationen und Divisionen den grössten Arbeitsaufwand, während demgegenüber die Summen- und Differenzbildungen kaum ins Gewicht fallen.

Diese Verhältnisse ändern sich u.U. wesentlich, wenn man die zur Verfügung stehenden technischen Hilfsmittel berücksichtigt. Als solche kommen in Betracht:

Rechentafeln, beispielsweise Logarithmentafeln,
Rechenschieber und ähnliche logarithmische Rechenwerkzeuge,
Rechenmaschinen verschiedener Art.

Die Verwendung von Logarithmentafeln wird im allgemeinen auf solche Fälle beschränkt bleiben, in denen aus besonderen Gründen die Genauigkeit des Rechenschiebers nicht ausreicht und eine Rechenmaschine nicht zur Verfügung steht. Beim Rechnen mit der Logarithmentafel besteht die zeitraubendste Arbeit in Aufschlagen, Ablesen und Interpolieren der einzelnen Zahlenwerte. Die Multiplikation oder Division zweier Zahlen erfordert 3 solche Ablesungen (2Faktoren und 1 Ergebniswert). Wesentlich vorteilhafter ist die Verwendung der Logarithmentafel für die Berechnung eines Produktes aus 3 oder mehr Zahlen; denn für ein Produkt aus $p+1$ Zahlen (= p Einzelmultiplikationen aus je 2 Zahlen) sind nur $p+2$ Zahlenwerte aus der Tafel abzulesen. Bei der Verwendung von Logarithmen-

tafeln kann es daher u.U. vorteilhaft sein, Determinanten gliedweise auszumultiplizieren (vgl.Abschnitt I a).

Bei Verwendung eines Rechenschiebers, der sich trotz seiner begrenzten Genauigkeit besonders für überschlägige Rechnungen gut eignet, ist der Arbeitsaufwand für eine Multiplikation oder Division u.U. geringer als für die Addition zweier Zahlen. Besonders bequem können nacheinander Divisionen und Multiplikationen ausgeführt werden; dieser Vorteil des Rechenschiebers kommt hauptsächlich bei allen Eliminationsverfahren zur Geltung. Rechenschieber mit Reziprokteilung eignen sich auch sehr gut für die Berechnung von Produkten aus 3 oder mehr Faktoren.

Bei Verwendung von Rechenmaschinen braucht bei den meisten hier in Betracht kommenden Rechnungen nur der Arbeitsaufwand für Multiplikationen und Divisionen berücksichtigt zu werden. Die Summierung mehrerer Produkte erfordert oft überhaupt keine zusätzliche Arbeit; bei Vorhandensein eines Summenspeicherwerkes (mit Vorzeichen-Berücksichtigung) kann mit einem einzigen Handgriff das errechnete Produkt aus dem Ergebniswerk gelöscht und in das Speicherwerk übertragen werden. Die bei den Verfahren IV ... VIII erforderliche Multiplikation von Vektoren und Matrizen besteht in der Berechnung von Summen aus mehreren Produkten. Diese Rechnung lässt sich daher mit Rechenmaschinen besonders bequem und einfach durchführen.

Es sei noch bemerkt, dass für Rechnungen dieser Art, besonders für die Produktbildung aus Vektoren und Matrizen oder aus zwei Matrizen in verhältnismässig einfacher Weise auch vollselbsttätige Rechenmaschinen, etwa nach dem Lochkartensystem, entwickelt werden können, während die vollselbsttätige Nachbildung von Eliminationsverfahren und Determinantenrechnungen wesentlich umständlicher ist,

6. Anforderungen an die Genauigkeit der Ergebnisse.

a) Erforderliche und erreichbare Genauigkeit.

Die Genauigkeit der Rechnung ist im allgemeinen dadurch begrenzt, dass nur eine bestimmte Anzahl von Dezimalstellen berücksichtigt werden kann. Bei Verwendung des Rechenschiebers ist diese Grenze durch die Ablesegenauigkeit festgelegt, bei Rechentafeln durch die Genauigkeit der Interpolation. Bei Verwendung von Rechenmaschinen können an sich 8 oder mehr Dezimalstellen erfasst werden. Da jedoch eine derart hohe Genauigkeit im allgemeinen nicht erforderlich ist, wird man sich meistens mit geringeren Stellenzahlen begnügen können. Eine übermässige Genauigkeit der Rechnung ist vor allem dann wertlos, wenn bereits die Elemente der gegebenen Matrix nur angenäherte, abgerundete oder auch z.B. durch Messung ermittelte und daher mit Messungenauigkeiten behaftete Zahlen sind.

Für Beurteilung der erreichbaren Genauigkeit ist es daher oft nützlich, die durch die Ungenauigkeit der Elemente bedingten Fehler in den Ergebnissen abzuschätzen.

Es wurde bereits früher (Seite 135 f.) darauf hingewiesen, dass bei mehrfachen Eigenwerten und ebenso auch dann, wenn der betrachtete Eigenwert sich von einem anderen Eigenwert nur wenig unterscheidet, u.U. schon sehr kleine Abweichungen der Elemente genügen, um eine verhältnismässig grosse Aenderung des betreffenden Eigenwertes zu bewirken. Handelt es sich dagegen um einen einfachen Eigenwert, so kann der grösstmögliche durch die Ungenauigkeit der Elemente hervorgerufene Fehler des errechneten Eigenwertes in einfacher Weise abgeschätzt werden.

b) Bestimmung des durch Ungenauigkeiten der gegebenen Matrix hervorgerufenen Fehlers in den Ergebnissen.

Statt der genauen Matrix $\mathfrak{A}$ sei beispielsweise die Matrix $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} + \varepsilon \mathfrak{B}$ gegeben, deren Elemente $a_{ik}' = a_{ik} + \varepsilon \cdot b_{ik}$ sich nur um geringe Beträge $\varepsilon \cdot b_{ik}$ von den Elementen der Matrix $\mathfrak{A}$ unterscheiden. Die Eigenwerte λ_i der Matrix $\mathfrak{A}$ sind durch die Gleichung $|\mathfrak{A} - \lambda_i \mathfrak{E}| = 0$ festgelegt, die Eigenwerte $\lambda_i' = \lambda_i + \delta_i$ der Matrix $\mathfrak{A}'$ durch die Gleichung $|\mathfrak{A}' - \lambda_i' \mathfrak{E}| = 0$. Es soll festgestellt werden, in welchem Mass ein bestimmter einfacher Eigenwert λ_k durch die Ungenauigkeit der Elemente beeinflusst wird.

Die Determinanten $|\mathfrak{A} - \lambda \mathfrak{E}|$ und $|\mathfrak{A}' - \lambda \mathfrak{E}|$ können, indem $\lambda = \lambda_k + \xi$ gesetzt wird, als Polynome von ξ dargestellt werden:

$$|(\mathfrak{A}-\lambda_K \mathfrak{E})-\xi\cdot\mathfrak{E}| = g_n - g_{n-1}\xi + g_{n-2}\xi^2 - \dots \qquad (163)$$

$$|(\mathfrak{A}'-\lambda_K \mathfrak{E})-\xi\mathfrak{E}| = g_n' - g_{n-1}'\xi + g_{n-2}'\xi^2 - \dots \qquad (164)$$

Die Koeffizienten g_ν und g_ν' ($\nu=1,\dots,n$) haben für die Matrizen ($\mathfrak{A}-\lambda_K\mathfrak{E}$) bzw. ($\mathfrak{A}'-\lambda_K\mathfrak{E}$) die gleiche Bedeutung wie die in Abschnitt II (Seite 15) betrachteten Koeffizienten s_ν ($\nu=1,\dots,n$) für die Matrix $\mathfrak{A}$. Sie können demgemäss entweder durch die Eigenwerte $\xi_i=\lambda_i-\lambda_K$ bzw. $\xi_i'=\lambda_i'-\lambda_K$ oder als Summe der Hauptunterdeterminanten ν-ter Ordnung dargestellt werden:

$$g_1 = \sum_{i=1,\dots,n}\xi_i = \sum_{i=1,2,\dots,n}(a_{ii}-\lambda_K)$$

$$g_2 = \sum\sum_{i<j=1,\dots,n}\xi_i\xi_j = \sum\sum_{i<j=1,\dots,n}\begin{vmatrix} a_{ii}-\lambda_K & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj}-\lambda_K \end{vmatrix} \qquad (165)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$g_n = \xi_1\cdot\xi_2\cdot\dots\cdot\xi_n = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda_K & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn}-\lambda_K \end{vmatrix} = |\mathfrak{A}-\lambda_K\mathfrak{E}|.$$

Aus $\xi_K=\lambda_K-\lambda_K=0$ folgt $g_n=0$.

Für g_{n-1} gilt, indem man mit u_{ii} die Hauptunterdeterminanten (n-1)-ter Ordnung der Matrix $(\mathfrak{A}-\lambda_K\mathfrak{E})$ bezeichnet,

$$g_{n-1} = \sum_{j=1,\dots,n}\left(\prod_{i\neq j}\xi_i\right) = \sum_{i=1,\dots,n} u_{ii}\ .$$

Die n Produkte $\prod\xi_i$ sind aus je (n-1) Werten ξ_i zu bilden und zu summieren. Da nur eins dieser Produkte von Null verschieden ist, während in allen übrigen der Faktor $\xi_K=0$ vorkommt, ist

$$g_{n-1} = \prod_{i\neq K}\xi_i = \sum u_{ii}\ . \qquad (166)$$

Ist λ_K ein einfacher Eigenwert, so ist also $g_{n-1}\neq 0$.

Der Ausdruck (164) verschwindet für $\lambda_K+\xi=\lambda_K'$, also $\xi=\lambda_K'-\lambda_K=\delta_K$:

$$g_n' - g_{n-1}'\delta_K + g_{n-2}'\delta_K^2 - \dots \pm \delta_K^n = 0 \qquad (167)$$

Die hierin vorkommenden Koeffizienten g_ν' ($\nu=1,\dots,n$) sind aus den Hauptunterdeterminanten der Matrix $(\mathfrak{A}'-\lambda_K\mathfrak{E})=(\mathfrak{A}-\lambda_K\mathfrak{E})+\varepsilon\cdot\mathfrak{B}$ zusammengesetzt, sie können daher als Polynome von ε dargestellt werden

$$g_\nu' = c_{\nu,0} + c_{\nu,1}\cdot\varepsilon + c_{\nu,2}\cdot\varepsilon^2 + \dots \qquad (168)$$

Für $\varepsilon\to 0$ geht der Ausdruck (164) in (163) über; die ε-freien Glieder $c_{\nu,0}$ der Koeffizienten g_ν' sind also mit den

Koeffizienten g_ν der Gleichung (163) identisch:

$$g'_n = |(\alpha - \lambda_i \mathfrak{E}) + \varepsilon \mathfrak{Z}| = 0 + c_{n,1}\,\varepsilon + c_{n,2}\,\varepsilon^2 + \dots \quad (169)$$

$$g'_{n-1} = g_{n-1} + c_{n-1,1}\,\varepsilon + c_{n-1,2}\,\varepsilon^2 + \dots \quad (170)$$

Mit (169) und (170) folgt aus (167)

$$\delta_\kappa = \frac{\varepsilon \cdot (c_{n,1} + c_{n,2}\cdot\varepsilon + c_{n,3}\cdot\varepsilon^2 + \dots)}{(g_{n-1} + c_{n-1,1}\,\varepsilon + c_{n-1,2}\,\varepsilon^2 + \dots) + g_{n-2}\,\delta_\kappa + g_{n-3}\,\delta_\kappa^2 + \dots} \quad (171)$$

Das Verhältnis $\delta_\kappa : \varepsilon$ nähert sich also unter der Voraussetzung $g_{n-1} \neq 0$ für $\varepsilon \to 0$, $\delta \to 0$ dem Wert

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{\delta_\kappa}{\varepsilon}\right) = \frac{c_{n,1}}{g_{n-1}} \quad . \quad (172)$$

$c_{n,1}$ ist nach Gleichung (168) der Koeffizient von ε in der Determimante $g'_n(\varepsilon) = |(\alpha - \lambda_\kappa \mathfrak{E}) + \varepsilon \cdot \mathfrak{Z}|$. Entwickelt man diese Determinante als Polynom von ε, so ergibt sich als Koeffizient von ε^ν die Summe sämtlicher Produkte aus den Unterdeterminanten ν-ter Ordnung von $\mathfrak{Z}$ und den komplementären Unterdeterminanten $(n-\nu)$-ter Ordnung von $(\alpha - \lambda_\kappa \mathfrak{E})$; der Koeffizient von ε beträgt also

$$c_{n,1} = \sum_{i,j=1,2,\dots,n} \sum b_{ij} \cdot u_{ij} \quad (173)$$

wenn b_{ij} das Element der i-ten Zeile und j-ten Spalte der Matrix $\mathfrak{Z}$ und u_{ij} die durch Streichung der i-ten Zeile und der j-ten Spalte aus der Matrix $(\alpha - \lambda_\kappa \mathfrak{E})$ erhaltene und noch mit dem Faktor $(-1)^{i+j}$ multiplizierte Unterdeterminante (n-1)-ter Ordnung ist.

Die aus den Unterdeterminanten u_{ij} zusammengestellte und transponierte Matrix

$$\mathfrak{U} = \begin{pmatrix} u_{11} \dots u_{n1} \\ \dots\dots\dots \\ u_{1n} \dots u_{nn} \end{pmatrix}$$

ist die Adjungierte (vgl. Seite 123) der Matrix $(\alpha - \lambda_\kappa \mathfrak{E})$, erfüllt also die Bedingung

$$(\alpha - \lambda_\kappa \mathfrak{E}) \cdot \mathfrak{U} = \mathfrak{U} \cdot (\alpha - \lambda_\kappa \mathfrak{E}) = D(\lambda_\kappa) \cdot \mathfrak{E} = 0. \quad (174)$$

Da λ_κ als einfacher Eigenwert vorausgesetzt ist, gibt es nur eine Eigenlösung $\mathfrak{x}^\kappa$, die die Bedingung $(\alpha - \lambda_\kappa \mathfrak{E}) \cdot \mathfrak{x}^\kappa = 0$ erfüllt und ebenso auch nur einen Vektor y_κ, der als Eigenzeile (Seite 89) die Bedingung $\overline{y_\kappa} \cdot (\alpha - \lambda_\kappa \mathfrak{E}) = 0$ erfüllt. Nach Gleichung (174) sind daher sämtliche Spalten der Matrix $\mathfrak{U}$ dem Vektor $\mathfrak{x}^\kappa$ und sämtliche Zeilen von $\mathfrak{U}$ dem Vektor y_κ und folglich die Matrix $\mathfrak{U}$ selbst der Elementarmatrix $\mathfrak{E}_\kappa = \mathfrak{x}^\kappa | \cdot \overline{y_\kappa}$ proportional.

Die Diagonalsumme der Elementarmatrix $\mathfrak{E}_\kappa$ ist = 1, die Diagonalsumme der Matrix $\mathfrak{U}$ ist nach Gleichung (166)

$$\Sigma u_{ii} = g_{n-1}$$

Folglich ist

$$\mathfrak{U} = g_{n-1} \cdot \mathfrak{k}^{\kappa} \qquad (175)$$

Nach Gleichung (173) ist

$$c_{n,1} = \sum_{i,j=1,\dots,n} \sum b_{ij} \cdot u_{ij} = S_1(\mathfrak{Z} \cdot \mathfrak{U}) \qquad (176)$$

wenn man mit $S_1(\mathfrak{M})$ allgemein die Diagonalsumme der Matrix $\mathfrak{M}$ bezeichnet. Mit (175) und (176) ergibt sich also aus Gleichung (172)

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\left(\frac{\delta_\kappa}{\varepsilon}\right) = \frac{S_1(\mathfrak{Z} \cdot \mathfrak{U})}{g_{n-1}} = \frac{g_{n-1} \cdot S_1(\mathfrak{Z} \cdot \mathfrak{k}^{\kappa})}{g_{n-1}} = S_1(\mathfrak{Z} \cdot \mathfrak{k}^{\kappa}). \qquad (177)$$

Die Elementarmatrix $\mathfrak{k}^{\kappa}$ lässt sich aus den Eigenlösungsvektoren $\mathfrak{z}^{\kappa}$ und $\mathfrak{y}_{\kappa}$ leicht bestimmen. Ist die Grösse dieser beiden Vektoren willkürlich gewählt und daher die Diagonalsumme der Matrix $\mathfrak{z}^{\kappa} / \overline{\mathfrak{y}_{\kappa}}$ von 1 verschieden, so muss diese Matrix noch durch ihre Diagonalsumme dividiert werden.

Der Unterschied zwischen den Werten λ_κ und λ_κ' beträgt nach Gleichung (177) näherungsweise

$$\lambda_\kappa' - \lambda_\kappa = \delta_\kappa \approx \varepsilon \cdot S_1(\mathfrak{Z} \cdot \mathfrak{k}^{\kappa}) = S_1(\varepsilon \mathfrak{Z} \cdot \mathfrak{k}^{\kappa}). \qquad (178)$$

Der grösstmögliche Fehler ergibt sich dann, wenn jedes Element b_{ij} der Matrix $\mathfrak{Z}$ mit der entsprechenden Unterdeterminante u_{ij}, also auch mit dem entsprechenden Element der transponierten Elementarmatrix $\mathfrak{k}^{*\kappa} = \mathfrak{y}_\kappa / \overline{\mathfrak{z}^{\kappa}}$ entweder das gleiche oder durchweg das entgegengesetzte Vorzeichen hat; denn in diesem Fall addieren sich in $c_{n,1} = \sum b_{ij} \cdot u_{ij}$ sämtliche Einzelfehler.

Beispiel: Die Matrix

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 12 & 5 & 2 \\ 5 & 7 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

besitzt die Eigenwerte $\lambda_1 = 16$, $\lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = 2$. Die Elemente der Matrix $\mathfrak{A}'$ mögen um $\pm$ 1 % von denen der Matrix $\mathfrak{A}$ verschieden sein. Zu ermitteln sei die höchstmögliche Abweichung der Eigenwerte λ_i' (i=1,2,3) der Matrix $\mathfrak{A}'$ von den obigen Werten λ_i.

Es sei $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} + 0{,}01\,\mathfrak{Z}$, worin die Elemente der Matrix $\mathfrak{Z}$ der Grösse nach mit denen der Matrix $\mathfrak{A}$ übereinstimmen; die Vorzeichen können jedoch verschieden sein. Die Elementarmatrizen der Matrix $\mathfrak{A}$ sind

$$\mathfrak{k}^1 = \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{k}^2 = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{k}^3 = \frac{1}{42} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 \\ -4 & 16 & -20 \\ 5 & -20 & 25 \end{pmatrix}$$

Für die grösstmöglichen Fehler der drei Eigenwerte ergibt sich nach Gleichung (178) näherungsweise

$$\delta_1 = \frac{0{,}01}{14} \cdot (12 \cdot 9 + 5 \cdot 6 + 2 \cdot 3 + 5 \cdot 6 + 7 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1) = 0{,}160$$

$$\delta_2 = \frac{0{,}01}{3} \cdot (12 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 7 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1) = 0{,}1433$$

$$\delta_3 = \frac{0{,}01}{42} \cdot (12 \cdot 1 + 5 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 5 \cdot 4 + 7 \cdot 16 + 3 \cdot 20 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 20 + 4 \cdot 25) = 0{,}0962$$

Für die grösstmöglichen Fehler der drei Eigenwerte ergibt sich nach Gleichung näherungsweise

$$\lambda_1' = \frac{0,01}{14} \cdot (12\cdot 9 + 5\cdot 6 + 2\cdot 3 + 5\cdot 6 + 7\cdot 4 + 3\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 2 + 4\cdot 1) = 0,160$$

$$\lambda_2' = \frac{0,01}{3} \cdot (12\cdot 1 + 5\cdot 1 + 2\cdot 1 + 5\cdot 1 + 7\cdot 1 + 3\cdot 1 + 2\cdot 1 + 3\cdot 1 + 4\cdot 1) = 0,1433$$

$$\lambda_3' = \frac{0,01}{42} \cdot (12\cdot 1 + 5\cdot 4 + 2\cdot 5 + 5\cdot 4 + 7\cdot 16 + 3\cdot 20 + 2\cdot 5 + 3\cdot 20 + 4\cdot 25) = 0,0962$$

also

$$\lambda_1' = 16 \pm 0,160 \quad , \quad \lambda_2' = 5 \pm 0,1433 \quad , \quad \lambda_3' = 2 \pm 0,0962.$$

Diese grösstmöglichen Fehler ergeben sich nur dann, wenn sämtliche Fehler der n^2 Elemente die höchstmögliche Grösse und derartige Vorzeichen haben, dass sie sämtlich im gleichen Sinne auf das Ergebnis einwirken. Nach den Regeln der Wahrscheinlichkeit sind die tatsächlich zu erwartenden Fehler in den Ergebnissen wesentlich geringer.

c) Die Ungenauigkeit der Rechnung.

Ausser diesen Fehlern, die auf die Ungenauigkeit der gegebenen Matrix zurückzuführen und daher unkontrollierbar sind, werden noch zusätzliche Fehler durch die Ungenauigkeit der Rechnung hervorgerufen. Beispielsweise muss bei jeder mit dem Rechenschieber ausgeführten Multiplikation oder Division mit einer Ungenauigkeit etwa in der Grössenordnung von $\pm$ 0,1 % gerechnet werden. Jeder dieser Fehler beeinflusst in bestimmtem Mass das Endergebnis.

Man kann, ähnlich wie es für die Ungenauigkeiten der Elemente gezeigt wurde, auch die Einflüsse aller Rechnungsungenauigkeiten auf das Ergebnis zueinander addieren und auf diese Weise den grösstmöglichen Gesamtfehler bestimmen. Der tatsächliche zu erwartende Fehler kann nach Wahrscheinlichkeitsregeln abgeschätzt werden; er wird im allgemeinen nur einen Bruchteil des grösstmöglichen Fehlers ausmachen.

Von einer vergleichenden Untersuchung bezüglich der mit den verschiedenen Verfahren erreichbaren Genauigkeit sei abgesehen. Die Unterschiede zwischen den für die Berechnung sämtlicher Eigenwerte hauptsächlich in Betracht kommenden Verfahren (Abschnitte Ic, d, II, III 1 und V) scheinen nicht sehr beträchtlich zu sein.

d) Nachprüfung der Genauigkeit.

Die Genauigkeit der errechneten Eigenwerte kann durch Einsetzen in die Säkulardeterminante (2) oder, wenn auch die entsprechenden Eigenlösungen bekannt sind, durch Einsetzen in das gegebene Gleichungssystem (1) nachgeprüft werden. Mit den genauen Eigenwerten λ_i müsste sich

$$D(\lambda_i) = |\alpha - \lambda_i \mathfrak{E}| = 0 \quad \text{und} \quad (\alpha - \lambda_i \mathfrak{E}) \cdot \mathfrak{x}_i = 0$$

ergeben. Abweichende Ergebnisse $D(\lambda_i') \neq 0$ und $(\alpha - \lambda_i') \cdot \mathfrak{x}_i' \neq 0$ können nach Abschnitt III bzw. IV zur nachträglichen Verbesserung der Genauigkeit benutzt werden.

7. Anwendungszweck der einzelnen Verfahren.

Abschliessend sei noch einmal in kurzer Zusammenfassung auf die Vor- und Nachteile der einzelnen Verfahren eingegangen. Man kann die beschriebenen Verfahren zunächst in zwei Hauptgruppen einteilen:

a) Allgemeine Verfahren, die zur Berechnung sämtlicher Eigenwerte dienen und grundsätzlich in jedem Fall zu diesem Zweck benutzt werden können. Hierzu gehören die in den Abschnitten I, II, III 1 und V behandelten Verfahren.

b) Näherungsverfahren, die hauptsächlich zur genaueren Berechnung einzelner in grober Annäherung bereits im voraus bekannter Eigenwerte und Eigenlösungen dienen und die nur dann mit Vorteil benutzt werden können, wenn gewisse Vorbedingungen für ihre Konvergenz erfüllt sind. Hierzu gehören ausser den Näherungsverfahren nach Abschnitt III 2, IV und VIII auch die in den Abschnitten VI und VII behandelten Verfahren.

A. Allgemeine Verfahren.

Ueber den erforderlichen Arbeitsaufwand bei den allgemeinen Verfahren gibt die Zahlentafel auf Seite 157 (Gruppe A) einen guten Ueberblick. Wäre dieser zahlenmässige Vergleich für die Auswahl des Verfahrens allein massgebend, so müsste z.B. für $n=3$ das Verfahren I b, für $n>3$ immer das Verfahren I d allen anderen Verfahren vorgezogen werden.

In den weiteren Betrachtungen dieses Abschnittes wurde aber bereits gezeigt, dass noch zahlreiche andere Gegebenheiten bei der Wahl des Verfahrens berücksichtigt werden müssen. Gerade das Verfahren I d erfordert zur Einhaltung des zweckmässigsten Rechnungsganges und zur sicheren Vermeidung von Rechenfehlern eine besondere Aufmerksamkeit.

Das Verfahren nach Abschnitt II zeichnet sich demgegenüber durch einen besonders übersichtlichen Rechnungsgang aus; man wird daher dieses Verfahren oft bevorzugen, sofern der Mehraufwand an Rechenoperationen nicht allzu gross ist, also etwa bei n=3, 4 oder 5.

Das Verfahren nach Abschnitt III 1 erfordert meistens einen etwas grösseren Arbeitsaufwand als das Verfahren II. Es kann jedoch besonders dann mit Vorteil verwendet werden, wenn ein oder mehrere Wertepaare $\alpha, D(\alpha)$ im voraus bekannt sind, ferner dann, wenn die Säkulargleichung in der ungeordneten Form (161) gegeben ist. Ein weiterer Vorteil dieses Verfahrens ist, dass man die errechneten Wertepaare $\alpha, D(\alpha)$ in vielen Fällen unmittelbar zur zeichnerischen überschlägigen Ermittlung der Eigenwerte verwenden kann.

Glied- oder gruppenweises Ausmultiplizieren der Säkulardeterminante (Abschnitt I a, b) kommt praktisch wohl nur für 2- oder 3-reihige Matrizen in Betracht, ausserdem u.U. dann, wenn eine grosse Anzahl von Elementen = 0 ist.

Das einzige unter den beschriebenen allgemeinen Verfahren, das auch bei $n \leq 6$ keinen wesentlich grösseren Arbeitsaufwand erfordert, als das Verfahren I d, zugleich aber wichtige Vorteile mit sich bringt, ist das in Abschnitt V behandelte Verfahren.

Die wichtigsten Vorteile sind: Der einfache und übersichtliche Rechnungsgang, die mit Rechenmaschinen besonders bequem durchführbare Bildung von Summen aus Produkten, die einen wesentlichen Teil der gesamten Rechnung ausmacht, und schliesslich die ausserordentlich einfache und rasche Ermittlung der Eigenlösungen, die zur Nachprüfung und bei ungenügender Genauigkeit zur Verbesserung der Ergebnisse benutzt werden können.

Als einziger Nachteil dieses Verfahrens muss beachtet werden, dass u.U. bei ungünstiger Wahl des Vektors z_0 einzelne Eigenlösungen und folglich auch die entsprechenden Eigenwerte überhaupt nicht oder nur ungenau erfasst werden, so dass gegebenenfalls die Wiederholung der Rechnung mit einem anderen Anfangsvektor notwendig ist./ Obwohl bei der Anwendung des Verfahrens V immer mit der

vgl. Abschn. V, 4.

Möglichkeit dieses unerwünschten Zufalles gerechnet werden muss, dürften doch wohl in den meisten Fällen die Vorteile dieses Verfahrens den Ausschlag geben.

b. Näherungsverfahren.

Näherungsverfahren eignen sich zur Verwendung in folgenden Fällen:

1) wenn nur einzelne, durch irgendwelche Nebenbedingungen von vornherein festgelegte Eigenwerte und Eigenlösungen gesucht sind;

2) wenn die Genauigkeit der mittels anderer Verfahren gefundenen Ergebnisse nicht ausreicht und daher eine Verbesserung nötig ist;

3) u.U. auch dann, wenn sämtliche Eigenwerte berechnet werden sollen, wenn jedoch die Vorausbestimmung einzelner Eigenwerte und Eigenlösungen in besonders einfacher Weise möglich ist. Die vorausberechneten Werte können dann, wie auf Seite 161 gezeigt, mit geringem Arbeitsaufwand zum Eliminieren einzelner Unbekannter aus dem Gleichungssystem (1) benutzt werden.

Die Verwendung des Näherungsverfahrens nach Abschnitt III 2 kommt dann in Betracht, wenn zur Nachprüfung eines auf irgendeinem Weg ermittelten Eigenwertes λ_i die Determinante $D(\lambda_i)$ berechnet wird und sich hierbei ein von 0 verschiedener Wert ergibt. Ferner muss für die Interpolation mindestens ein weiteres Wertpaar $\alpha, D(\alpha)$ oder näherungsweise der gesamte Verlauf der Parabel $D(\lambda)$ bekannt sein. Sind diese Voraussetzungen nicht erfüllt, so wird es im allgemeinen zweckmässiger sein, die dem errechneten Eigenwert entsprechende Eigenlösung zu ermitteln und diese zur Nachprüfung und gegebenenfalls zur Verbesserung der Genauigkeit zu benutzen.

Die Verfahren VI und VII eignen sich besonders zur Bestimmung des grössten Eigenwertes und der entsprechenden Eigenlösung. Die Voraussetzungen, unter denen eine rasche Konvergenz zu erwarten und daher die Verwendung dieser Verfahren zu empfehlen ist, wurden auf Seite 100 erörtert. Die Eignung dieser Verfahren zur Ermittlung weiterer Eigenwerte und Eigenlösungen kann erst nach Ermittlung des grössten Eigenwertes bzw. der entsprechenden Eigenlösung oder Elementarmatrix geprüft werden.

Sind die Spalten der zu untersuchenden Matrix annähernd parallel, so ist auch für die Ermittlung sämtlicher Eigenwerte eine Vorausbestimmung des grössten Eigenwertes oft vorteilhaft. Man kann dann für die Berechnung der übrigen Eigenwerte die Matrix $\mathfrak{L} = \alpha^2 - \lambda_1 \alpha$ verwenden, aus deren Eigenwerten

$\beta_i = \lambda_i \cdot (\lambda_i - \lambda_1)$ leicht die Werte λ_i errechnet werden können. Ferner kann der Eigenwert λ_1 mit der Eigenlösung ξ^1, wie auf Seite 161 gezeigt, zur Elimination einer Unbekannten aus dem Gleichungssystem (1) benutzt werden.

Zur genaueren Berechnung irgendwelcher näherungsweise bekannter Eigenwerte eignen sich wohl am besten die in Abschnitt IV beschriebenen Näherungsverfahren. Diese Verfahren haben den wichtigen Vorteil, dass nur ein geringer Teil der Rechnung, nämlich die Bestimmung des Fehlervektors $f = (\alpha - \lambda_i' \xi) \cdot \xi^i$ wegen der Bildung kleiner Differenzen aus grossen Zahlen mit hoher Genauigkeit durchgeführt werden muss; dieses Ausmultiplizieren kann mit Hilfe einer Rechenmaschine sehr bequem und rasch und mit beliebiger Genauigkeit durchgeführt werden. Dagegen ist für die Auflösung des linearen Gleichungssystems (17) bzw. (20) keine besonders hohe Genauigkeit erforderlich, da es sich dabei nur um die Berechnung von Korrekturgliedern handelt. Man kann für diese Rechnung den Rechenschieber verwenden, der sich gerade für die Durchführung von Eliminationsrechnungen besonders gut eignet.

Oft wird bereits der erste Näherungsschritt (IV 1) zur Erreichung der erforderlichen Genauigkeit genügen. Zur Kontrolle empfiehlt es sich aber immer, mindestens noch einen weiteren Näherungsschritt (IV 2 oder 3) durchzuführen, zumal der hierfür erforderliche zusätzliche Arbeitsaufwand sehr gering ist.

Die Benutzung der verbesserten Eigenlösung (IV 2) zur weiteren Verbesserung der Genauigkeit ist insofern besonders vorteilhaft, als dabei, wie auf Seite 46 gezeigt, ein Teil der Eliminationsrechnung eingespart werden kann. Ferner ist die Verwendung der verbesserten Eigenlösung dann zu empfehlen, wenn der Näherungswert λ_i' bereits ziemlich genau ist, dagegen die benutzte angenäherte Eigenlösung ξ^i nur überschlägig ermittelt wurde.

Die Benutzung des verbesserten Eigenwertes (IV 3) kommt besonders dann infrage, wenn gut angenäherte Eigenwerte durch beschleunigte Verfahren (IV 4) ermittelt wurden, ohne dass eine entsprechend genaue Näherung für die Eigenlösung bekannt ist.

Sind die benutzten Näherungswerte λ_i' und ξ^i derartig ungenau, dass die Konvergenz der Näherungsverfahren IV 2 oder 3 zu langsam fortschreiten würde, so empfiehlt sich eine vollständige Wiederholung der Näherungsrechnung (IV 5) unter Benutzung des verbesserten Näherungswertes λ_i'' und der verbesserten Eigenlösung $\xi^{i''}$.

Sind sämtliche n Eigenlösungen einer Matrix näherungsweise bekannt und sämtlich oder wenigstens zum grösseren Teil noch ver-

besserungsbedürftig, so kann auch das in Abschnitt VIII beschriebene Verfahren mit Vorteil verwendet werden. Meistens wird man sich jedoch auf die Verbesserung einzelner Eigenlösungen und Eigenwerte beschränken können und daher die in Abschnitt IV beschriebenen Verfahren bevorzugen.